

Devoir Surveillé 07 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. L'ensemble E est contenu dans l'espace $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ et est non vide (il contient manifestement la fonction nulle). Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire.

Soient $(f, g) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$; alors $h = \lambda f + \mu g$ est continue sur $[0, 1]$ et

$$\int_0^1 h(t).dt = \lambda \int_0^1 f(t).dt + \mu \int_0^1 g(t).dt = 0$$

par linéarité de l'intégration. Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

2. L'ensemble F est contenu dans l'espace E et est non vide (il contient manifestement la fonction nulle). Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire.

Soient $(f, g) \in (F)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$; alors $h = \lambda f + \mu g$ appartient à l'espace E et par définition

$$\forall x \in [0, 1] \quad h(1-x) = (\lambda f + \mu g)(1-x) = \lambda f(1-x) + \mu g(1-x)$$

$$\text{donc } h(1-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x) = h(x) \text{ car } \begin{cases} f(1-x) = f(x) \\ g(1-x) = g(x) \end{cases}.$$

On a bien $h \in F$.

Donc F est un sous-espaces vectoriel de E . Il en est de même pour G .

Montrons qu'ils sont supplémentaires :

- Soit $f \in F \cap G$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(1-x) = f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle.

$$\text{Ainsi } \boxed{F \cap G = \{\tilde{0}\}} \quad (1)$$

- *Analyse* : Soit $h \in E$. Supposons que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors $\forall x \in [0, 1] \quad h(x) = f(x) + g(x)$ et $h(1-x) = f(1-x) + g(1-x) = f(x) - g(x)$.

$$\text{Donc } \forall x \in [0, 1] \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(1-x)) \\ g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - (1-x)) \end{cases}$$

- *Synthèse* : Soit $h \in E$. On définit deux fonctions f et g en posant

$$\forall x \in [0, 1] \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(1-x)) \\ g(x) = \frac{1}{2}(h(x) - (1-x)) \end{cases}$$

Il est clair que f est continue sur $[0, 1]$ car $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$.

Le changement de variable $u = 1 - t$ montre que $\int_0^1 h(1-t)dt = -\int_1^0 h(u)du = 0$.

On a alors $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 h(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^1 h(1-t)dt = 0$ et donc $f \in E$.

Enfin $\forall x \in [0, 1], f(1-x) = \frac{1}{2}(h(1-x) + h(1-(1-x))) \Rightarrow f(1-x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(1-x)) = f(x)$.

On a bien $f \in F$. De même $g \in G$.

Enfin il est évident que $h = f + g$ car $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) + g(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(1-x)) + \frac{1}{2}(h(x) - (1-x)) = h(x)$.

On a prouvé que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. donc $F + G = E$ (2).

- Conclusion : (1) et (2) donnent $E = F \oplus G$

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}_0$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

1. (a) Pour tout P et Q de E et β réels : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f(\alpha P + \beta Q))(x) &= 2x(\alpha P + \beta Q)(x) - (x^2 - 1)(\alpha P + \beta Q)'(x) \\ &= \alpha(2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)) + \beta(2xQ(x) - (x^2 - 1)Q'(x)) \\ &= \alpha f(P)(x) + \beta f(Q)(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$ et f est une application linéaire.

- (b) Soit $P(x) = a + bx + cx^2$ pour tout x réels alors $P'(x) = b + 2cx$

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= 2x(a + bx + cx^2) - (x^2 - 1)(b + 2cx) \\ &= b + 2(c + a)x + bx^2 \end{aligned}$$

Donc pour tout $P \in E$, $f(P) \in E$ et f est une application de E dans E

Conclusion : $f \in \mathcal{L}(E)$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e'_0(x) = 0 \text{ donc } f(e_0)(x) = 2x \text{ donc } f(e_0) = 2e_1$$

$$e'_1(x) = 1 \text{ donc } f(e_1)(x) = 2x^2 - (x^2 - 1) = 1 + x^2 \text{ donc } f(e_1) = e_0 + e_2$$

$$e'_2(x) = 2x \text{ donc } f(e_2)(x) = 2x^3 - (x^2 - 1)2x = 2x \text{ donc } f(e_2) = 2e_1$$

On a alors les coordonnées des images et

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. (a) \text{ On a } \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_0); f(e_1); f(e_2)) = \text{Vect}(2e_1; e_0 + e_2) = \text{Vect}(e_1; e_0 + e_2)$$

Et comme la famille $(e_1; e_0 + e_2)$ est libre (deux vecteurs non proportionnels), elle est libre et génératrice de $\text{Im}(f)$, c'en est donc une base.

(b) On résout $f(a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2) = 0$. On trouve par linéarité $2a_0e_1 + a_1(e_0 + e_2) + 2a_2e_1 = 0$ et (e_0, e_1, e_2) libre, l'équation est donc équivalente à $a_1 = 0$ et $a_2 = -a_0$.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_0 - e_2)}$$

3. On a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_0 - e_1)$ donc on peut prendre $u_1 = e_0 - e_1$.

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$

donc u_2 se choisit dans $E_2 = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + e_3)$, prenons $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$.

$$(A + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

donc u_2 se choisit dans $E_{-2} = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$, prenons $u_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$

Exercice 3

$$1. f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \neq 0, f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t}.$$

(a) f est continue paire sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient des deux fonctions : la fonction Arctan continue sur $\mathbb{R}$, impaire, et la fonction $t \mapsto t$ continue, impaire, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

D'autre part, au voisinage de 0 : $\text{Arctan}(t) \sim t$ montre que $f(t) \sim 1$.

Ainsi : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ paire}}$

(b) Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, qui, au voisinage de 0, se développe en $\text{Arctan}'(t) = 1 - t^2 + o(t^2)$.

$$\text{D'où } \text{Arctan}(t) = \text{Arctan}(0) + t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{puis} \quad \boxed{f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)}$$

Ce DL₁ en 0 montre que $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$

(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (en tant que quotient de deux fonctions dérivables).

Comme elle est aussi dérivable en 0, on peut dire $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

$$\text{Sur } \mathbb{R}^* : f'(t) = \frac{\frac{1}{1+t^2}t - \text{Arctan}(t)}{t^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\forall t \neq 0, f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\text{Arctan}(t)}{t^2}}$$

(d) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Intégrons $I = \int_0^t \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} d\omega$ par parties en posant :

$$\begin{cases} u(\omega) = \omega & u'(\omega) = 1 \\ v(\omega) = \frac{-1}{2(1+\omega^2)} & v'(\omega) = \frac{\omega}{(1+\omega^2)^2} \end{cases} \quad \text{u et v de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}. \quad \text{On obtient}$$

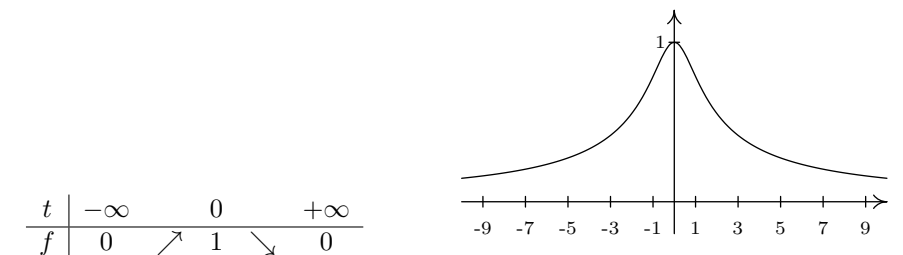
$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{-\omega}{2(1+\omega^2)} \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{-t}{2(1+t^2)} + \frac{\text{Arctan}(t)}{2} \\ &= -\frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\text{Arctan}(t)}{t^2} \right) \quad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} d\omega = -\frac{t^2}{2} f'(t)} \end{aligned}$$

Il est clair que $t > 0 \Rightarrow I > 0$ (intégrale d'une fonction positive entre 0 et t, avec $0 < t$). Ce qui précède montre qu'alors $f'(t) < 0$, donc f décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par parité : $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_-^*, \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$

(e) Complétons le tableau des variations :

$$\lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0$$



$$2. \varphi(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

(a) f étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en 0. F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $F(0) = 0$.

Sur $\mathbb{R}^*$, φ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (dénominateur non nul) donc de classe $\mathcal{C}^1$.

D'autre part, quand x tend vers 0 : $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers la dérivée $F'(0) = f(0) = 1$, qui est bien la valeur de $\varphi(0)$. φ est continue sur $\mathbb{R}$

Enfin, f étant paire, F est impaire¹ donc

φ est paire

(b) f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > 0$: $0 \leq t \leq x \Rightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(0) = 1$.

En intégrant ($0 < x$) il vient : $\int_0^x f(x) dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$,

soit $xf(x) \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$, et en divisant par $x > 0$ $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.

Si x est négatif, alors $-x > 0$ et $f(-x) \leq \varphi(-x) \leq 1$.

La parité des fonctions f et φ permet d'écrire $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$

Enfin, l'encadrement reste valable pour $x = 0$ car il devient $1 \leq 1 \leq 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$$

(c) Nous avons déjà justifié la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^*$: $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x}$ se dérive

en $\varphi'(x) = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2}$

$$\forall x \neq 0 : \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$$

Étudions le comportement de φ' au voisinage de 0 :

— $F(0) = 0$ et $f(x) = 1 + o(x)$ (voir **1-b**) montre que $F(x) = x + o(x^2)$

donc $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x} = 1 + o(x)$

— Ainsi : $f(x) - \varphi(x) = o(x)$, ce qui montre que $\varphi'(x) = \frac{o(x)}{x} = o(1)$

Conclusion : φ continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $\lim_0 \varphi' = 0$

montre que

$$\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = 0$$

L'encadrement **2-b** montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \varphi(x) \leq 0$.

$\varphi'(x)$ est du signe de $-x$, d'où les variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$ 1 $\searrow$	0

(d) Sur $\mathbb{R}_+$: $0 \leq \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Nous avons $\forall x > 1, \forall t \in [1, x]$,

$$0 \leq \frac{\text{Arctan } t}{t} \leq \frac{\pi/2}{t} \Rightarrow 0 \leq \int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} \int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2} \ln x$$

En divisant par $x > 0$: $0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\text{Arctan } t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} \frac{\ln x}{x}$

et, par pincements

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$$

1. Par changement de variable $t = -u$: $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x -f(-u) du = -\int_0^x f(u) du = -F(x)$

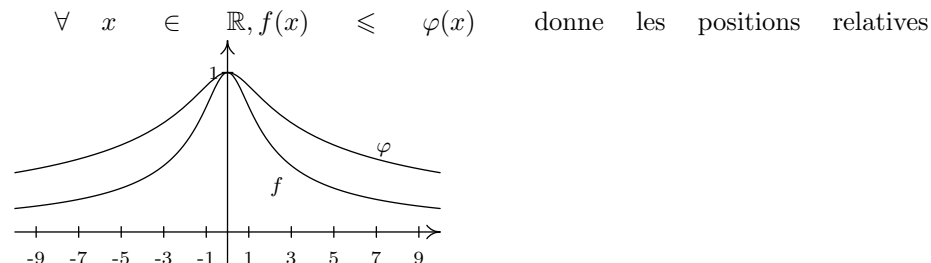
Comme $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$, où $\int_0^1 f(t) dt$ est une constante,

nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

(e) Représentation graphique :

f et φ ont les mêmes variations



3. (a) Il est clair que $t \geq 0 \Rightarrow \frac{t}{1+t^2} \geq 0$. D'autre part $\frac{1}{2} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2}{2(1+t^2)} \geq 0$

CONCLUSION

$$\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$$

Note : on pouvait aussi étudier les variations sur $[0, +\infty]$ de $t \mapsto g(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

(b) φ' est négative sur $\mathbb{R}_+$. Nous avons donc : $\forall x > 0$,

$$|\varphi'(x)| = -\varphi'(x) = \frac{1}{x} (\varphi(x) - f(x)) \leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} (x - \text{Arctan } x)$$

$$\text{Avec } x = \int_0^x dt, \quad \text{Arctan } x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad \forall x > 0, \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

En majorant pour $t \geq 0$: $t \frac{t}{1+t^2} \leq t \frac{1}{2}$ (voir **3-b**) et en intégrant

$$(\text{avec } 0 < x) \quad \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \leq \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^x \quad \text{d'où} \quad \forall x > 0, \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

la majoration reste vraie pour $x = 0$ (car $\varphi'(0) = 0$)

et pour $x < 0$ par parité (φ paire $\Rightarrow \varphi'$ impaire) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$

(c) Considérons $h : x \mapsto x - \varphi(x)$. Ce qui précède montre que $h'(x) = 1 - \varphi'(x) > 0$.

h continue strictement croissante est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] \lim_{-\infty} h, \lim_{+\infty} h[= \mathbb{R}$.

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α

Comme de plus $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = 1 - \varphi(1) > 0$ (voir les variations de φ), cette solution appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

$$\alpha \in [0, 1]$$

(d) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer les accroissements finis entre les réels u_n et α : $\exists c \in]\alpha, u_n[\quad \varphi(u_n) - \varphi(\alpha) = (u_n - \alpha) \varphi'(c)$.

Avec la majoration précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

la suite (u_n) converge vers α

4. Soit l'équation différentielle (E) : $x^2 y' + x y = \text{Arctan } x$.

(a) Pour $x \neq 0$, (E) s'écrit $x y' + y = \frac{\text{Arctan } x}{x}$, soit encore $(x y)' = f(x)$.

Sur tout intervalle ne contenant pas 0, les solutions de (E) sont données par

$$x y(x) = \int_0^x f(t) dt + \Lambda \quad (\Lambda \in \mathbb{R})$$

d'où

$$y(x) = \varphi(x) + \frac{\Lambda}{x}$$

(b) Une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ est donnée par $y(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{\Lambda_1}{x} & \text{pour } x < 0 \\ \Lambda_2 & \text{pour } x = 0, \\ \varphi(x) + \frac{\Lambda_3}{x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

et doit être continue d'où la condition nécessaire :

$$\lim_{0^-} y = y(0) = \lim_{0^+} y \quad \text{qui donne} \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = 0, \quad \Lambda_2 = 1$$

Alors $y = \varphi$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie bien (E) (voir 2-c).

φ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

-A- Préliminaire

1. Montrons que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ converge vers 0 : $\forall \varepsilon > 0$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k \geq N_1 \Rightarrow |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{car } (x_n) \rightarrow 0 \right)$$

Pour tout entier $n > N_1$ nous avons alors

$$|S_n| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{N_1} x_k \right|}_A + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n \underbrace{|x_k|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{A}{n} + \frac{n - N_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

A est indépendant de n donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{n} = 0$ d'où : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 \Rightarrow \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

En posant $N = \max(N_1, N_2)$ nous avons : $\forall n > N \quad |S_n| < \varepsilon$ soit

$$(S_n) \rightarrow 0$$

2. Théorème de Césaro : si la suite (x_n) converge vers l , alors $(x_n - l) \rightarrow 0$. On peut lui appliquer le résultat précédent qui montre que

$$\frac{(x_1 - l) + \dots + (x_n - l)}{n} \rightarrow 0 \quad \text{soit} \quad \frac{x_1 + \dots + x_n - n l}{n} \rightarrow 0$$

ce qui prouve que

$$(x_n) \rightarrow l \Rightarrow (S_n) \rightarrow l$$

3. Si $x_n = (-1)^n$: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -1 + 1 - \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_1 + \dots + x_n| \leq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq |S_n| \leq \frac{1}{n}$$

Par pincement, on en déduit $x_n = (-1)^n \Rightarrow S_n \rightarrow 0$

ce qui prouve que

la réciproque du théorème de Césaro est fausse

-B- Première Application

$$0 < u_0 < 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est défini et $0 < u_n < 1$:

• **amorce** : par hypothèse, u_0 est défini et $0 < u_0 < 1$

• **hérédité** : si $0 < u_n < 1$, alors $1 < 1 + u_n < 2 < e$.

Ceci montre que $\ln(1 + u_n)$ est défini et $\ln(1) < \ln(1 + u_n) < \ln(e)$

c'est-à-dire

$$(u_n) \text{ est définie et } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$$

L'étude rapide de $\varphi : x \ln(1 + x) - x$ montre que : $x \in]0, 1[\Rightarrow \ln(1 + x) \leq x$

En effet : $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ et $\varphi(0) = 0$.

Note : on peut également utiliser la convexité de $x \mapsto \ln(1 + x)$. La courbe est située sous ses tangentes, en particulier la tangente en $x = 0$ d'équation $y = x$.

Ainsi, la suite u_n est décroissante puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1[\Rightarrow u_{n+1} = \varphi(u_n) < u_n$

Décroissante minorée, la suite (u_n) converge vers $l \in [0, 1]$.

$x \mapsto \ln(1 + x)$ étant continue sur cet intervalle, l vérifie $\ln(1 + l) = l \Leftrightarrow \varphi(l) = 0$ donc $l = 0$ (voir l'étude de φ)

$$(u_n) \text{ converge vers } 0$$

2. Formons un développement limité de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x} \left(1 - 1 - \frac{x}{2} - o(x)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow \\ \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Comme $(u_n) \rightarrow 0$ et $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ln(1+u_n)}$, nous pouvons dire $\boxed{(v_n) \rightarrow -\frac{1}{2}}$

3. Le théorème de Césaro appliqué à (v_n) prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = -\frac{1}{2}$.

Or $\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} \right) =$
 $-\frac{1}{2}$.

On en déduit $\frac{1}{n u_n} = \underbrace{\frac{1}{n u_n} - \frac{1}{n u_0}}_{\rightarrow 1/2} + \underbrace{\frac{1}{n u_0}}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{2}$ d'où $\boxed{u_n \sim \frac{2}{n}}$

Comme $(u_n) \rightarrow 0$, pour obtenir un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, cherchons un équivalent de $\ln(1+x) - x$ au voisinage de 0. Un développement limité donne la réponse

$$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi : $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2} \sim -\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{2} = -\frac{2}{n^2}$ $\boxed{u_{n+1} - u_n \sim -\frac{2}{n^2}}$

-C-Second Application

$$0 < u_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Puisque l'image par la fonction "sin" de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

Il est alors immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$

Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ (en fait sur $\mathbb{R}_+$) : $\sin(x) \leq x$ donc (u_n) est décroissante.

Décroissante minorée, cette suite converge. Sa limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vérifie $l = \sin l$

("sin" est continue) donc $l = 0$ ($\sin x > x$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$) $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$

2. Comme $(u_n) \rightarrow 0$, pour étudier $v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$ utilisons un développement limité de $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \sim -\frac{1}{3}$$

Ainsi : $(u_n) \rightarrow 0$ et $v_n = \varphi(u_n)$ montre que

$$\boxed{v_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2} \rightarrow -\frac{1}{3}}$$

3. Comme dans la question précédente : $\sum_{k=1}^n v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_{n-1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u_n^2}$

Le théorème de Césaro appliqué à (v_n) montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u_n^2} \right) = -\frac{1}{3}$.

On en déduit que $\frac{1}{n u_n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) + \frac{1}{n u_0^2} \rightarrow \frac{1}{3}$

donc $n u_n^2 \sim 3 \Rightarrow u_n^2 \sim \frac{3}{n}$. u_n étant positif

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

Enfin, au voisinage de 0 : $\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}$.

Comme $(u_n) \rightarrow 0$: $u_{n-1} - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6} \sim -\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right)^3}{6}$ $\boxed{u_{n+1} - u_n \sim -\frac{\sqrt{3}}{2} n^{-3/2}}$

La suite du **-B-** converge vers 0 comme $\frac{1}{n}$, donc plus rapidement que celle du **-C-** (qui approche 0 comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Valeurs des suites (u_n)

En pointillés : l'équivalent

