

Le vendredi 06 Mars 2026

14h-18h

Devoir Surveillé 07

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t).dt = 0\}$$

1. Démontrer que E est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$
2. On considère les ensembles F et G de E définis par :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1] \quad f(1 - x) = f(x)\}$$

$$G = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1] \quad f(1 - x) = -f(x)\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On pourra pour cela montrer que :

- F SEV de E
- G SEV de E
- Si f appartient à $F \cap G$ alors f est la fonction nulle
- $F + G = E$ par analyse-synthèse.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E , associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
(b) En écrivant, pour tout réel x , $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E .
(c) Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0 , e_1 et e_2 , puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Vérifier que $\text{Im } f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2)$.
(b) Déterminer $\text{Ker } f$.

Exercice 3

Soit λ un réel donné, et soit I l'intervalle $] -1; 1[$.

On considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) : (1 - x^2)y' + (3x + 1 - \lambda)y = 0$$

1. Déterminer les réels a et b dépendant de λ tels que pour tout $x \in I$,

$$\frac{3x + 1 - \lambda}{1 - x^2} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$$

2. Résoudre l'équation (E_λ) sur I pour tout réel λ .
3. Montrer que les seules valeurs de λ pour lesquelles les solutions de (E_λ) sont des fonctions polynômiales sont : $-2; 0; 2; 4$. Préciser alors les solutions correspondantes.
4. Soient $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, et $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

On note R et S les polynômes définis par $R = 1 - X^2$, et $S = 1 + 3X$.

- (a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a : $RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Montrer que l'application f qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = RP' + SP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (c) Calculer $f(P)$ pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$, et en déduire la matrice A de f dans la base B .
- (d) Déterminer les polynômes Q et les réels λ tels que $f(Q) = \lambda Q$.
- (e) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 4

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t}$.
- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$, et paire.
 - (b) Montrer que f est continue en 0. On pourra utiliser le fait que Arctan est dérivable en 0.
 - (c) On admet que f est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.
 - (d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \int_0^t \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} d\omega = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

En déduire le sens de variation de f .

- (e) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2cm).
2. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

- (a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$, et paire.
- (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par supposer $x > 0$).
- (c) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x))$$

Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$. Donner les variations de φ .

- (d) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

- (e) Tracer la courbe représentative de φ dans le même repère que celle de f .
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où φ est l'application du **-2-**.
- (a) Montrer que : $\forall t \geq 0, \quad 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.
 - (b) Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

(on pourra utiliser **-2-b-** et **-2-c-**).

En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}$, et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$.

- (c) Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x$ admet une unique solution.

On note α cette solution. Montrer que $\alpha \in]0; 1]$.

- (d) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

4. On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + x y = \text{Arctan}(x)$.

- (a) résoudre cette équation différentielle sur $] -\infty, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$
- (b) Montrer que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Exercice 5**Moyenne de Césaro et deux applications****-A-/ Préliminaire**

Soit (x_n) une suite réelle. On lui associe la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

1. Montrer que, si (x_n) converge vers 0, alors (S_n) converge aussi vers 0.
2. En déduire le **théorème de Césaro** :
si la suite (x_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite (S_n) converge vers l .
3. Montrer que $|S_n| \leq \frac{1}{n}$ quand $x_n = (-1)^n$. Que peut-on en conclure ?

-B-/ Application

On définit la suite (u_n) par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est définie et bornée (par 0 et 1).
Montrer ensuite qu'elle converge¹ et préciser sa limite.
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$.
Au moyen d'un développement limité, déterminer la limite de $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ quand x tend vers 0.
En déduire la limite de la suite (v_n) .
3. *Vitesse de convergence de la suite (u_n) .*
Appliquer le théorème de Césaro à (v_n) , et en déduire la limite de la suite $(n u_n)$, puis un équivalent de u_n en fonction de n .
En déduire ensuite un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .

-C-/ Seconde application

On définit la suite (u_n) par $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n+1}^2}$.
Montrer, comme dans la première partie, que (v_n) converge et déterminer sa limite.
3. Inspirez-vous de la partie précédente pour déterminer, en fonction de n , des équivalents de u_n et de $u_{n+1} - u_n$.
Comparer les résultats des deux parties.

1. On pourra étudier rapidement le signe de $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$