Devoir Surveillé 06

Le vendredi 2 Février 2024

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

I désigne, soit l'intervalle $\left]-\infty, 0\right[$, soit l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$.

On donne l'équation différentielle

$$(1): \quad x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4\,x\,e^x$$

où y désigne une fonction réelle de la variable x, définie sur I.

1. Pour tout réel $x \in I$, on pose $z(x) = x\ y(x)$.
   Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (1) si et seulement si $x \mapsto z(x)$ est solution d'une équation différentielle (2) que l'on précisera.
2. On recherche une solution particulière de (2) sous la forme $x \mapsto z(x) = P(x)\,e^x$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ (polynôme à coefficients réels).
   (a) Montrer que, si P existe, il est forcément de degré 2.
   (b) Donner une solution particulière de (2) sous la forme indiquée.
3. Résoudre sur I l'équation (2), et en déduire toutes les solutions de (1) sur I.
4. *Raccordement des solutions :*
   (a) Trouver toutes les solutions $x \mapsto y(x)$ de (1) définies sur $\mathbb{R}$. Pour cela on cherchera les solutions qui vérifient :
   — être solution de l'équation (1) sur $\left]-\infty, 0\right[$
   — être solution de l'équation (1) sur $\left]0, +\infty\right[$,
   — être solution de l'équation en x=0,
   — continue en 0
   — deux fois dérivables en 0.
   (b) Indiquer, si elle existe, la solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 2

$\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Par convention : $\forall\ z \in \mathbb{C}^* \quad z^0 = 1$.

On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. (a) Discuter, suivant la valeur du complexe u, le *nombre* d'antécédents de u.
   (b) f est-elle surjective ? f est-elle injective ?
   (c) Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ --- } |z| = 1\}$ et F l'intervalle réel $[-2\,,\,2]$.
   Montrer que : $f(\mathcal{U}) \subset F$ et que $f(z) \in F \Rightarrow z \in \mathcal{U}$.
   (d) Soit $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ --- } 0 < |z| < 1\}$.
   Montrer que f induit[1] une application $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C} - F$, et que g est une bijection.
2. Recherche des polynômes P_n tels que[2] $\forall\ z \in \mathbb{C}^* \quad f(z^n) = P_n\big(f(z)\big)$
   (a) Déterminer directement[3] les polynômes P_0, P_1 et P_2.
   (b) Pour $n \geqslant 2$, justifier que le polynôme P_n existe et vérifie[4]
   $$\forall\ n \geqslant 1 \quad P_{n+1}(X) = X\,P_n(X) - P_{n-1}(X)$$
   En déduire l'expression de $P_3(X)$.
   Note : on démontre facilement l'unicité des polynômes P_n.
   (c) Déterminer le degré de P_n et étudier sa parité.
3. Pour tout entier n strictement positif, on considère l'équation algébrique dans $\mathbb{C}$:
   $$(E_n) \qquad P_n(x) = 0$$
   (a) Justifier le changement d'inconnue[5] $x = f(z)$, puis résoudre[6] l'équation (E_n).
   (b) Vérifier que (E_n) admet n racines réelles distinctes.
   Classées par ordre décroissant, elles seront notées $x_{n,k} \quad k \in [\![0, n-1]\!]$.
   On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que $\forall\ k \in [\![0, n-2]\!]$, $x_{n,k} > x_{n-1,k} > x_{n,k+1}$.

---

1. C'est-à-dire : $\forall\ x \in \mathcal{D},\ g(x) = f(x)$.
2. Il s'agit d'une composée. Par exemple, si $P(X) = X^2$ nous obtenons $P\big(f(z)\big) = \big(z + \frac{1}{z}\big)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$.
3. Écrire la condition que doit vérifier P_k. Dans les trois cas, un polynôme **très simple** convient.
4. On procédera par récurrence sur deux termes, c-à-d $\forall\ n \geqslant 1$, si P_{n-1} et P_n existent, alors P_{n+1} existe et à la valeur indiquée. Pour cela, on écrira $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = \big(z + \frac{1}{z}\big)\cdots$ (l'énoncé donne la réponse).
5. Le changement d'inconnue proposé permet-il d'obtenir toutes les solutions ?
6. L'équation obtenue revient à chercher les racines $2n^{\text{ème}}$ d'une constante simple (utiliser la forme trigonométrique). Ne pas oublier de "revenir en x".

Les parties **-A-** *et* **-B-** *sont indépendantes, mais sont utilisées par la partie* **-C-**

Exercice 3
Partie -A-

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_a(t) = t^{\,a}$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Préciser la valeur de $g_a(0)$. Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $a \geqslant 1$.

   Soit a et b deux réels positifs ou nuls. On pose

$$I(a,b) = \int_0^1 g_a(t)\, g_b(1-t)\ dt$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$. Comparer $I(a,b)$ et $I(b,a)$.

   On écrira abusivement $\quad I(a,b) = \int_0^1 t^a(1-t)^b\, dt$

3. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1,b)$ et $I(a,b+1)$.
4. Calculer $I(a,0)$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
$$I(a,n) = \frac{n\,!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}.$$
5. Soient p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p,q)$ à l'aide de factorielles.
6. En déduire la valeur de l'intégrale $\quad J(p,q) = \int_0^{\pi/2} \big(\sin\theta\big)^{2p+1} \big(\cos\theta\big)^{2q+1}\, d\theta$
   où p et q sont deux entiers naturels.

Partie -B-

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par $\quad f_a(x) = x\,\ln\left(1 - \dfrac{a}{x}\right)$

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a.

   On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de f_a à l'intervalle $\big]a. +\infty\big[$.

2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement
$$\frac{a}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-a) \leqslant \frac{a}{x-a}$$
3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $\big]a, +\infty\big[$ (on dressera un tableau de variations). Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.
4. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma
5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $\quad y = (y_n) \quad$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par $\quad y_n = \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n$

   Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n)

Partie -C-

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n, on pose

$$F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x \, du$$

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} \, I(x, n)$.
2. En utilisant les résultats de la partie **-B-**, montrer que, pour tout x fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
3. On fixe $x \geqslant 0$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que
   $$\forall\, u \in \mathbb{R}_+ \quad u \geqslant U \;\Rightarrow\; e^{-u} \leqslant \frac{1}{u^{x+2}}$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a
   $$F_n(x) \leqslant \int_0^U e^{-u} \, u^x \, du + \frac{1}{U}$$
   (c) Montrer que la suite $\big(F_n(x)\big)_{x\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x, on pose $F(x) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x)$.

4. Démontrer la relation fonctionnelle $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x+1) = (x+1)\, F(x)$.
   En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.