Devoir Surveillé 06 - Eléments de Correction

Exercice 1

L'équation (1) : $\quad xy'' + 2y' - xy = 4xe^x$ est définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$.

1. L'application z est deux fois dérivable (produit de fonctions dérivables).
   Comme $z = x\,y$, $z' = y + x\,y'$, $z'' = 2\,y' + x\,y''$. (1) devient : $\boxed{(2): \quad z' - z = 4\,x\,e^x}$

2. (a) Soit P un polynôme de degré n tel que $z : x \mapsto P(x)e^x$ est solution de (2).
   En dérivant, il vient : $\left\{\begin{array}{rl|l} z(x) = & e^x\,P(x) & -1 \\ z'(x) = & e^x\,\big(P(x) + P'(x)\big) & 0 \\ z''(x) = & e^x\,\big(P(x) + 2P'(x) + P''(x)\big) & 1 \end{array}\right.$.
   Comme e^x ne s'annule pas, P convient ssi $\quad \underline{(3):\ 2P'(x) + P''(x) = 4x}$
   Soit n le degré de P :
   — Si $n < 2$, alors $2P' + P''$ est constant, donc ne convient pas.
   — Donc $n \geqslant 2$ et alors $\deg\big(P' + P''\big) = n - 1$ d'où la condition $\quad n - 1 = 1$
   Conclusion $\quad \boxed{\text{Si } P \text{ convient, alors } \deg(P) = 2}$

   (b) On cherche donc P sous la forme $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.
   La condition (3) se traduit en $2\,(2ax+b)+2a = 4x$ soit $4ax+2(a+b) = 4x$.
   c est quelconque. Par identification, avec $c = 0$, il vient $\boxed{P(x) = x^2 - x}$

3. L'équation (2) est linéaire, du second ordre, à coefficients constants.
   — L'équation caractéristique $t^2 - 1 = 0$ a pour solutions $t = \pm 1$.
   Les solutions de l'ESSMA sont $z(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} \quad A, B \in \mathbb{R}$
   — La question précédente nous donne une solution particulière : $x \mapsto (x^2 - x)\,e^x$
   La linéarité donne les solutions (par addition) $\boxed{z : x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-x} + (x^2 - x)\,e^x}$

   Les solutions de (1) sur I sont $y : x \mapsto \dfrac{z(x)}{x}$, soit $\boxed{z : x \mapsto \dfrac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x}$

4. (a) Les calculs précédents sont valables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^+$ (il suffit de changer les valeurs des constantes A et B).
   Prenons donc $f(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 \quad z(x) = \dfrac{A_1\,e^x + B_1\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x \\ \text{si } x > 0 \quad z(x) = \dfrac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x \end{cases}$

   et voyons s'il est possible de donner une valeur à $f(0)$ telle que :
   — *f continue en 0* :
   — quand $x \to 0^+$:
   $\diamond$ $(x-1)e^x \to -1$
   $\diamond$ $\dfrac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x} = \underbrace{\dfrac{A\,(e^x - 1) + B\,(e^{-x} - 1)}{x}}_{\to A-B} + \dfrac{A+B}{x}$ a une limite infinie,
   sauf si $A + B = 0$, cas où $f(x) \to A - B = 2\,A$
   — Le même raisonnement s'applique quand $x \to 0^-$.
   $\underline{\text{Il faut poser } f(0) = 2\,A \quad \text{avec les conditions } B_1 = B = -A_1 = -}$

   — *f est dérivable en 0* : sous les conditions précédentes
   $\begin{cases} f(x) = A\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2\,A - 1 \end{cases}$
   On peut alors vérifier que cette fonction est :
   — dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$
   — deux fois dérivable en 0, la valeur $f''(0) = \dfrac{2A}{3} + 1$ importe peu
   — vérifie (1) pour x=0
   Conclusion $\quad \boxed{\text{sur } \mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = A\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2\,A - 1 \end{cases}}$

   (b) La condition initiale $y(0) = 0$ conduit immédiatement à $\boxed{A = \dfrac{1}{2}}$

Exercice 2

Notons que f est bien une application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}$ puisque tout complexe non nul admet une image unique qui est un complexe.

1. (a) Recherchons tous les antécédents z d'un élément quelconque $u \in \mathbb{C}$:
   $$f(z) = u \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z + \frac{1}{z} = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^2 - u\,z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z^2 - u\,z + 1 = 0 \ (E)$$
   (puisque $z = 0$ n'est pas solution de (E))
   Or une telle équation admet toujours deux solutions complexes (éventuellement confondues si le discriminant $u^2 - 4$ est nul, c'est-à-dire quand $u = \pm 2$).

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{c}\text{2 et -2 admettent un unique antécédent}\\ \text{tous les autres complexes admettent exactement 2 antécédents}\end{array}}$

(b) f est donc surjective (existence d'un antécédent) mais n'est pas injective (deux complexes distincts ont parfois la même image) $\boxed{f \text{ est surjective et non injective}}$

(c) $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \;—\; |z| = 1\}$ est représenté par le cercle trigonométrique.

Que peut-on dire de l'image d'un élément de $\mathcal{U}$? si $|z| = 1$ alors

$z = e^{i\theta}$ et $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \in [-2, 2]$ d'où $\boxed{f(\mathcal{U}) \subset F}$

Inversement, étudions les antécédents de $u \in [-2, 2]$. Ils sont solutions de l'équation (E) du second degré $z^2 - u\,z + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = u^2 - 4 \leqslant 0$. On obtient $z = \frac{u \pm i\sqrt{4-u^2}}{2}$ qui sont toutes deux [1] de module 1.

Ceci prouve que $\boxed{f(z) \in F \Rightarrow z \in \mathcal{U}}$

(d) g ***est une application :***

Il est clair que $z \in \mathcal{D} \Rightarrow z \neq 0$ donc z admet une image unique $f(z) = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$.

D'autre part, la question précédente prouve que $f(z) \notin F$ (dans le cas contraire, il faudrait $z \in \mathcal{U}$, soit $|z| = 1$ qui est impossible dans $\mathcal{D}$).

$\boxed{g : \mathcal{D} \to \mathbb{C} - F \text{ est une application}}$

g est bijective :

pour cela, montrons que tout élément $u \in \mathbb{C} - F$ admet un antécédent et un seul dans $\mathcal{D}$. Reprenons le calcul du **1-a)** :

— tout complexe u admet deux antécédents z_1 et z_2 qui sont les solutions de l'équation $(E) : z^2 - u\,z + 1 = 0$.
— Comme $u \notin F$, la question précédente montre que $|z_1| \neq 1$ et $|z_2| \neq 1$.
— D'autre part, le produit des racines : $z_1 z_2 = 1$ montre que $|z_1|\,|z_2| = 1$ donc, l'une d'elles (et seulement une) a un module inférieur à 1

Conclusion $\boxed{g \text{ est une bijection}}$

2. ***Recherche des polynômes tels que*** $f(z^n) = P_n(f(z))$

(a) — $\underline{n = 0}$: la condition devient $f(1) = P_0(z + \frac{1}{z})$ soit $2 = P_0(z + \frac{1}{z})$.

Il suffit de prendre $\boxed{P_0(X) = 2}$

1. Ces deux solutions sont distinctes sauf dans le cas $u = \pm 2$.)

— $\underline{n = 1}$: La condition devient $f(z) = P_1(z + \frac{1}{z})$ soit $z + \frac{1}{z} = P_1(z + \frac{1}{z})$. Il suffit de prendre $\boxed{P_1(X) = X}$

— $\underline{n = 2}$: La condition devient $f(z^2) = P_2(z + \frac{1}{z})$ soit $z^2 + \frac{1}{z^2} = P_2(z + \frac{1}{z})$.

En remarquant que $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$ Il suffit de prendre $\boxed{P_2(X) = X^2 - 2}$

(b) Nous venons d'amorcer une récurrence. Montrons l'hérédité :

si, pour $n \geqslant 2$, $f(z^n) = P_n(z + \frac{1}{z})$ et $f(z^{n-1}) = P_{n-1}(z + \frac{1}{z})$, alors

$$f(z^{n+1}) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = \left(z + \tfrac{1}{z}\right)\left(z^n + \tfrac{1}{z^n}\right) - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}}$$

montre que $f(z^{n+1}) = \left(z + \frac{1}{z}\right) P_n(z + \frac{1}{z}) - P_{n-1}(z + \frac{1}{z}) = P_{n+1}(z + \frac{1}{z})$

en prenant $\boxed{P_{n+1}(X) = X\,P_n(X) - P_{n-1}(X)}$

d'où l'existence de P_{n+1} et la formule de récurrence.

Remarque : Si deux polynômes P_n et Q_n vérifient

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^* \quad f(z^n) = P_n\left(f(z)\right) = Q_n\left(f(z)\right)$$

alors le polynôme $P_n - Q_n$ est nul puisqu'il s'annule pour une infinité de valeurs (tous les complexes de $f(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$),d'où l'unicité.

On applique la formule pour calculer P_3 :

$P_3(X) = X\,P_2(X) - P_1(X) = X\,(X^2 - 2) - X$ qui donne $\boxed{P_3(X) = X^3 - 3\,X}$

(c) Les premiers termes semblent montrer que $\boxed{\begin{array}{c}\deg(P_n) = n\\ P_n \text{ à la parité de } n\end{array}}$

Ceci se confirme facilement par récurrence :

— $P_{n+1}(X) = \underbrace{\underbrace{X}_{\deg 1}\;\underbrace{P_n(X)}_{\deg n}}_{\deg n+1} - \underbrace{P_{n-1}(X)}_{\deg n-1<n+1}$ est bien de degré n+1

— si n est pair, alors P_{n+1} est impair puisque
$P_{n+1}(-X) = (-X)\,P_n(-X) - P_{n-1}(-X) = -X\,P_n(X) + P_{n-1}(X) = -P_{n+1}(X)$

Démonstration semblable dans le cas "n impair".

3. (a) f étant surjective, tout complexe x peut se mettre sous la forme $x = f(z)$.

L'équation $P_n(x) = 0$ s'écrit alors

$$P_n\left(f(z)\right)=0 \Leftrightarrow z^n+\frac{1}{z^n}=0 \Leftrightarrow z^{2n}=-1$$

Sous forme trigonométrique il vient $|z|=1$ et $2n\arg(z)\equiv\pi\ [2\pi]$, soit

$$z=e^{i\theta_k} \quad \text{avec} \quad \theta_k=\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}, \quad k\in[\![0,2n-1]\!]$$

d'où $\boxed{x_{n,k}=z+\frac{1}{z}=2\cos\theta_k\,,\quad \theta_k=\frac{1}{2n}+k\frac{\pi}{n}\,,\quad k\in[\![0,n-1]\!]}$

en effet : $\theta_{2n-1-k}=\frac{1}{2n}+(2n-1-k)\frac{\pi}{n}=-\frac{1}{2n}-k)\frac{\pi}{n}=-\theta_k$ ont le même cosinus, et $k\in[\![0,n-1]\!] \Rightarrow \theta_k\in]0,\pi[$ où "cos" est injective (car strictement décroissante) donc les n solutions sont distinctes.

(b) Nous venons de voir que, sur l'intervalle utilisé, la fonction cosinus est décroissante. L'inégalité $x_{n,k}>x_{n-1,k}>x_{n,k+1}$ est équivalente à $\theta_{n,k}<\theta_{n-1,k}<\theta_{n,k+1}$, soit

$$\frac{1}{2n}+k\frac{\pi}{n}<\frac{1}{2(n-1)}+k\frac{\pi}{n-1}<\frac{1}{2n}+(k+1)\frac{\pi}{n}$$

qui se vérifie aisément.

Conclusion $\boxed{\forall\, k\in[\![0,n-2]\!]\ ,\ x_{n,k}>x_{n-1,k}>x_{n,k+1}}$

Exercice 3
Partie -A-

$a\geqslant 0 \qquad g_a(t)=t^a=e^{a\ln t}$

1. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il est clair que g_a est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
Comme $\lim_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$, la limite à droite en 0 est simple : $\begin{cases} a>0 & g_a(t)\to 0\\ a=0 & g_a(t)\to 1\\ a<0 & g_a(t)\to +\infty\end{cases}$

Conclusion $\boxed{g_a \text{ se prolonge par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ en } \begin{cases} g_0(0)=1 & \text{si } a=0\\ g_a(0)=0 & \text{si } a>0\end{cases}}$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, g_a est ce classe $\mathcal{C}^\infty$ (composée de telles fonctions) et $g_a'(t)=\frac{a}{t}\,e^{a\ln t}=a\,t^{a-1}$ a une limite finie en 0^+ si $a-1\geqslant 0$ (étude précédente). Dans ces conditions :

$$\left.\begin{array}{c} g_a \text{ définie, continue sur } \mathbb{R}_+\\ g_a \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+^*\\ \lim_{t\to 0^+} g_a'(t)=l\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow g_a \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ avec } g_a'(0)=l$$

Conclusion $\boxed{\text{si } a\geqslant 1,\ g_a \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ avec } \begin{cases}\text{si } a=1 & g_1'(0)=1\\ \text{si } a>1 & g_a'(0)=0\end{cases}}$

Note : $\boxed{g_a'=a\,g_{a-1}}$

2. $a,b\geqslant 0$. Si $t\in[0,1]$, alors $1-t\in[0,1]$ donc $t\mapsto g_a(t)\,g_b(1-t)$ est continue (produit et composée de telles fonctions), donc intégrable.

Conclusion $\boxed{a,b\geqslant 0\quad I(a,b)=\int_0^1 g_a(t)\,g_b(1-t)\,dt \text{ est définie}}$

Le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$) : $u=1-t\quad du=-dt$ transforme l'intégrale $I(a,b)=\int_0^1 g_a(t)\,g_b(1-t)\,dt=-\int_1^0 g_a(1-u)\,g_b(u)\,du=I(b,a)$ $\boxed{I(a,b)=I(b,a)}$

3. Pour transformer $I(a+1,b)$, utilisons une intégration par parties :
$\left\{\begin{array}{ll} g_{a+1}(t)=t^{a+1} & g_{a+1}'(t)=(a+1)g_a(t)\\ h(t)=\dfrac{1}{b+1}g_{b+1}(1-t) & h'(t)=-g_b(1-t)\end{array}\right\}$ où g_{b+1} et h sont de classe $\mathcal{C}^1$

permet d'écrire :

$I(a+1,b)=\int_0^1 g_{a+1}(t)\,g_b(1-t)\,dt$

$=\left[-\dfrac{1}{b+1}g_{a+1}(t)g_{b+1}(1-t)\right]_0^1+\dfrac{a+1}{b+1}\int_0^1 g_a(t)\,g_{b+1}(1-t)\,dt$

$=\dfrac{a+1}{b+1}I(a,b+1) \qquad (\text{car } a+1,b+1>0 \Rightarrow g_{a+1}(0)=g_{b+1}(0)=0)$

Conclusion $\boxed{I(a+1,b)=\dfrac{a+1}{b+1}I(a,b+1)}$

4. Nous avons $I(a,0)=\int_0^1 t^a(1-t)^0\,dt=\int_0^1 t^a\,dt=\left[\dfrac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1$ $\boxed{I(a,0)=\dfrac{1}{a+1}}$

En utilisant le résultat de **-A-3** sous la forme $\dfrac{b+1}{a+1}I(a+1,b)=I(a,b+1)$:

$I(a,n)=\dfrac{n}{a+1}I(a+1,n-1)=\dfrac{n}{a+1}\,\dfrac{n-1}{a+2}\,I(a+2,n-2)$

et, par une itération évidente :

$$I(a,n)=\frac{n}{a+1}\,\frac{n-1}{a+2}\cdots\frac{1}{a+n}\underbrace{I(a+n,0)}_{=\frac{1}{a+n+1}}\qquad \boxed{I(a,n)=\frac{n\,!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}}$$

5. En remplaçant (a,n) par $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, il vient
$$I(p,q)=\frac{q\,!}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q+1)}\qquad\text{soit}\qquad\boxed{I(p,q)=\frac{p\,!\,q\,!}{(p+q+1)\,!}}$$

6. Utilisons ceci pour calculer $J_{p,q}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p+1}\theta\,\cos^{2q+1}\theta\,d\theta$
$=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)^p\,(\cos^2\theta)^q\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$
par changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $t=\sin^2\theta$ $dt=2\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$
il vient $J_{p,q}=\dfrac{1}{2}\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,dt$ $\boxed{J_{p,q}=\dfrac{I(p,q)}{2}=\dfrac{p\,!\,q\,!}{2\,(p+q+1)\,!}}$

Partie -B-

$a>0\qquad f_a(x)=x\,\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)$

1. f_a est définie pour $x\neq 0$ et $1-\dfrac{a}{x}>0\Leftrightarrow\dfrac{x-a}{x}>0$: $\boxed{\mathcal{D}_{f_a}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]a,+\infty\right[}$

2. Pour $0<a<x$, encadrons $\ln(x)-\ln(x-a)$. Plusieurs méthodes sont possibles :
<u>*En utilisant les accroissements finis :*</u> "ln" étant de classe $\mathcal{C}^1$
$\ln(x-a)=\ln(x)-a\dfrac{1}{c}$ où $0<x-a<c<x\Rightarrow\dfrac{a}{x}<\dfrac{a}{c}<\dfrac{a}{x-a}$
Conclusion $\boxed{0<a<x\qquad\dfrac{a}{x}<\ln(x)-\ln(x-a)<\dfrac{a}{x-a}}$

<u>*en utilisant la concavité :*</u> la fonction "ln" étant concave, nous avons $\forall\,t>0\quad\ln t\leqslant t-1$

(ceci se retrouve très rapidement en étudiant les variations de $\varphi:t\mapsto\ln t-t+1$ $\varphi'(t)=\dfrac{t-1}{t}\cdots$) qui donne $\ln(1-\dfrac{a}{x})\leqslant\dfrac{a}{x}$ et $\ln\left(1+\dfrac{a}{x-a}\right)\leqslant\dfrac{a}{x-a}$
<u>*En intégrant :*</u> $x-a\leqslant t\leqslant x\Rightarrow\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{x-a}$ sur $[x-a,x]$ **etc...**

3. La fonction f_a est dérivable sur son ensemble de définition comme composée de telles fonctions (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$).
$$f_a'(x)=\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)+x\,\frac{1}{1-\frac{a}{x}}\,\frac{a}{x^2}=\ln(x-a)-\ln(x)+\frac{a}{x-a}$$
D'après **-B-2**, $f_a'(x)\geqslant 0$ quand $0<a<x$

x	a		$+\infty$
f_a'	$\|\|$	$+$	
f_a	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	$-a$

Étude des branches infinies :
— $\lim_{a^+}f_a=-\infty$ n'est pas indéterminée $\boxed{\mathcal{C}_a\text{ présente une asymptote verticale } x=a}$
— au voisinage de l'infini, $\ln\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\sim-\dfrac{a}{x}$
donc $f(x)\sim-a\neq 0$
$\boxed{\text{En }+\infty,\ \mathcal{C}_a\text{ présente une asymptote horizontale } y=-a}$

4. Représentation des courbes $\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_3$:
le tableau de variations de la question **-B-3** est valable pour ces trois valeurs de a.

5. $y_n=\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n=e^{n\,\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}=e^{f_a(n)}$ avec $0<a<n$. On peut utiliser la croissance de f_a et de l'exponentielle qui donnent immédiatement $\boxed{(y_n)_{n>a}\text{ est croissante}}$
Comme $\lim_{x\to+\infty}f_a(x)=-a$, nous avons $\lim_{n\to+\infty}e^{f_a(n)}=e^{-a}$. $\boxed{(y_n)_{n>a}\text{ converge vers } e^{-a}}$

Partie -C-

$F_n(x)=\int_0^n\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x\,du$

1. Le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $u=n\,t$ $du=n\,dt$ transforme l'intégrale
$F_n(x)=\int_0^1(1-t)^n\,(n\,t)^x\,n\,dt=n^{x+1}\int_0^1 t^x\,(1-t)^n\,dt$ $\boxed{F_n(x)=n^{x+1}I(x,n)}$

2. Montrons (directement) la croissance de la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$
Notons que $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n=y_n$ (pour $a=u$)
donc, si $u<n<n+1$ nous avons $y_n\leqslant y_{n+1}$ (suite croissante) soit
$u<n<n+1\Rightarrow\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n\leqslant\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}$
$\Rightarrow\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x\leqslant\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}u^x$ car (u^x) est positif
$\Rightarrow\int_0^n\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x\,du\leqslant\int_0^n\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1}u^x\,du$

$\Rightarrow \int_0^n \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x\,du \leqslant \int_0^{n+1}\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\,du$ car $n<n+1$ et $\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x > 0 \Rightarrow \int_n^{n+1}\left(1-\dfrac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x\,du \geqslant 0$

Conclusion $\boxed{\text{La suite } \big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

3. $x \geqslant 0$

(a) Étudions $z(u) = u^{x+2}e^{-u}$ quand $u \to +\infty$:

$$z(u) = e^{-u}e^{(x+2)\ln u} = e^{\lambda} \quad \text{où} \quad \lambda = u\underbrace{\Big(-1+(x+2)\underbrace{\frac{\ln u}{u}}_{\to 0}\Big)}_{\to -1} \to -\infty$$

Ainsi : $\lim_{u\to+\infty} z(u) = 0 \Rightarrow \exists\, U \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+ \quad U < u \Rightarrow 0 < z(u) < 1$

ce qui est le résultat attendu. $\boxed{\exists\, U \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, u \quad U<u \Rightarrow e^{-u} \leqslant \dfrac{1}{u^{x+2}}}$

(b) — Nous avons $F_n(x) = \int_0^n \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n u^x\,du$ avec $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n = y_n \leqslant e^{-u}$ (voir **-B-5** suite croissante qui converge vers e^{-u}).

Comme $u^x > 0$ et $0<n$ il vient $F_n(u) \leqslant \int_0^n e^{-u}\,u^x\,du$

— Ceci est vrai pour tout entier n, donc si $n \leqslant U$:

$$F_n(u) \leqslant \int_0^n e^{-u}\,u^x\,du \leqslant \int_0^U e^{-u}\,u^x\,du \leqslant \int_0^U e^{-u}\,u^x\,du + \frac{1}{U}$$

— Si $n > U$: $F_n(u) \leqslant \int_0^U e^{-u}\,u^x\,du + \int_U^n e^{-u}\,u^x\,du.$

Dans la deuxième intégrale, $u \geqslant U \Rightarrow e^{-u} \leqslant \dfrac{1}{u^{x+2}} \Rightarrow e^{-u}\,u^x \leqslant \dfrac{1}{u^2}$

qui permet d'en déduire $\int_U^n e^{-u}\,u^x\,du \leqslant \int_U^n \dfrac{1}{u^2}\,du = \left[-\dfrac{1}{u}\right]_U^n = \dfrac{1}{U} - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{U}$

Conclusion $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \quad F_n(u) \leqslant \int_0^U e^{-u}\,u^x\,du + \dfrac{1}{U}}$

(c) Les deux questions précédentes montrent que la suite $\big(F_n(x)\big)$ est croissante majorée, donc $\boxed{\text{la suite } \big(F_n(x)\big) \text{ converge}}$

4. Établissons une relation entre $F_n(x+1)$ et $F_{n+1}(x)$ puis passons à la limite :

$$\begin{aligned} F_n(x+1) &= n^{x+2} I(x+1,n) && \text{(voir-}\textbf{C-1}\text{)}\\ &= n^{x+2}\,\frac{x+1}{n+1}\,I(x,n+1) && \text{(voir }\textbf{-A-3}\text{)}\\ &= n^{x+2}\,\frac{x+1}{n+1}\,\frac{F_{n+1}(x)}{(n+1)^{x+1}} && \text{(voir-}\textbf{C-1}\text{)}\\ \text{d'où} \quad F_n(x+1) &= (x+1)\,F_{n+1}(x)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{x+2} \end{aligned}$$

En passant à la limite (quand $n \to +\infty$), il vient : $\boxed{F(x+1) = (x+1)F(x)}$

— Commençons par calculer $F(0) = \lim_{n\to+\infty} F_n(0)$: Comme

$$\begin{aligned} F_n(0) &= n^{(0+1)}\,I(0+1,n) = n\,I(n,0) && \text{voir }\textbf{-A-2}\\ &= n\,\frac{1}{n+1} && \text{voir }\textbf{-A-4} \end{aligned}$$

En passant à la limite (quand $n \to +\infty$), il vient $\boxed{F(0) = 1}$

— On peut alors utiliser la relation ci-dessus :

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 \times F(0) = 1\\ F(2) &= 2 \times F(1) = 2\times 1\\ F(3) &= 3 \times F(2) = 3\times 2\times 1 \end{aligned}$$

et, par une récurrence évidente : $\boxed{F(n) = n\,!}$