Devoir Surveillé 06 - Eléments de Correction

Exercice 1

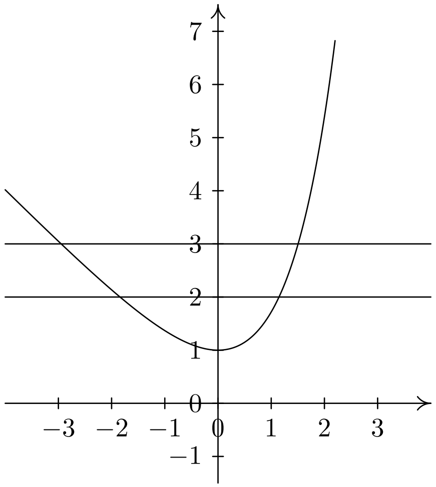
1. $f(x)=e^x-x$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ (car $x\to-\infty$; $e^x\to 0$)
   et $f(x = x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ (car $\frac{e^x}{x} \to +\infty$: th de cc)
   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x=0}$ donc $D : y=-x$ asymptote à C en $-\infty$

2. $f'(x)=e^x-1$; $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 1 \nearrow$	$+\infty$

3. Pour $n \geqslant 2$, f est $\begin{cases}\text{continue}\\ \text{strictement } \searrow\end{cases}$ de $]-\infty\,;\,0]$ vers $f(]-\infty;0]) = [1;+\infty[$ qui contient n, donc l'équation $f(x)=n$ a une solution unique dans $]-\infty;0]$; de même :
   f est $\begin{cases}\text{continue}\\ \text{strictement } \nearrow\end{cases}$ de $[0;+\infty[$ vers $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$ qui contient n, donc l'équation $f(x)=n$ a une solution unique dans $[0;+\infty[$; en conclusion, pour $n\geqslant 2$, l'équation $f(x)=n$ a deux solutions de signe contraire.

4. a_n est la solution positive de $f(x)=n$, donc a_n est l'abscisse de point d'intersection de C et de la droite D_n d'équation $y=n$



5. $f(a_n)=n$, donc $f(a_{n+1})=n+1$, donc $f(a_n)<f(a_{n+1})$, et comme les $a_n$sont dans $[0;+\infty[$ et que f est croissante dans $[0;+\infty[$, on obtient : $a_n<a_{n+1}$, pour tout $n\geqslant 2$; donc la suite est croissante.

6. On a $e^{a_n}-a_n=n$, donc $e^{a_n}=a_n+n$, donc, comme $a_n>0$, $e^{a_n}\geqslant n$, donc $a_n\geqslant \ln(n)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$, donc (th de comparaison), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$.

Exercice 2 (Correction partielle)

Soit n, un entier naturel. On considère, sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$xy'+ny=\frac{1}{1+x^2} \qquad (E_n)$$

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in I$, $(H_n) \Leftrightarrow y'+\frac{n}{x}y=0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on va résoudre sur I avec $a : x\mapsto \frac{n}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On obtient qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$y : x\mapsto \lambda e^{-n\ln(x)}=\lambda\frac{1}{x^n},\ I\to\mathbb{R}$$

2. (a) Par identification des numérateurs on obtient $a=1$, $b=0$ et $c=-1$.
   (b) On considère (E_0) : $y'=\frac{1}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}$ sur l'intervalle I. Par intégration simple on trouve une solution particulière de (E_0) :

$$y_p : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto \ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

   D'où la solution générale de (E_0) équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y_0 : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto \ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\lambda\frac{1}{x^n}$$

3. Déterminons une solutions particulière sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ de :

$$y'+\frac{n}{x}y=\frac{1}{x(1+x^2)}$$

   en utilisant la méthode de variation de la constante. On obtient :

$$\frac{\lambda'}{x^n}=\frac{1}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow \lambda'=\frac{x^{n-1}}{1+x^2}$$

   Par superposition des solutions on obtient les solutions de :
   (a) l'équation (E_1)

$$y_1 : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{Arctan}(x)+\lambda\frac{1}{x}$$

   (b) l'équation (E_2)

$$y_1 : I\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\lambda\frac{1}{x^2}$$

(c) l'équation (E_3) en remarquant que $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$$y_1 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \text{Arctan}(x) + \lambda \frac{1}{x^3}$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note : pour tout $x \geq 0$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^{n-1}}{1+t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, F_n est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en constitue une primitive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\lambda' = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$ implique que $\lambda = F_n$ convient, d'où les solutions de (E_n) sont :

$$y_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto F_n(x) + \lambda \frac{1}{x^n}$$

5. Dans cette question, on va expliciter une expression de $F_n(x)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F_n(x) + F_{n+2}(x) &= \int_0^x \frac{t^{n-1} + t^{n+1}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1}(1+t^2)}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x t^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{n} x^n \end{aligned}$$

   (b) Exprimer $F_1(x)$ et $F_2(x)$ en fonction de $x \in I$.
   (c) Établir, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall x \in I, F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \ln(1+x^2) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}.$$

   (d) Établir, pour tout $n \geq 1$:

$$\forall x \in I, F_{2n+1}(x) = (-1)^n \text{Arctan}(x) + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

   (e) Exhiber les solutions de (E_5) sur I.
6. On note f, la solution de (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(1) = \frac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$.
   (b) Établir que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x.$$

   (c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur I (limites aux bords comprises et justifiées). En particulier, on montrera que f admet une limite finie ℓ en 0 que l'on calculera.
   On posera désormais $f(0) = \ell$.
   (e) Prouver que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   (f) Tracer le graphe de la fonction f sur I.
7. Dans cette question, on généralise des résultats établis ci-dessus dans le cas particulier $n = 1$. Soit un entier $n \geq 1$.
   (a) Etablir que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}.$$

   (b) En déduire la limite de $\dfrac{F_n(x)}{\frac{x^n}{n}}$ lorsque x tend vers 0^+.
   (c) Montrer que, parmi les solutions de (E_n) sur $I =]0, +\infty[$, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note f_n cette fonction, prolongée en 0 par continuité.
   (d) Justifier que f_n est dérivable en 0.
   (e) En n'oubliant pas que f_n est une solution de l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
   (f) Prouver que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\frac{\pi}{4} - fn(1)}{n-1}.$$

Exercice 3
Partie II

9) On justifiera que $|u_n| = \int_0^\pi \frac{|sint|}{t} dt$, puis on utilisera le changement de variable $t = s + n\pi$. Il sera alors possible d'étudier le signe de $|u_{n+1}| - |u_n|$, et de majorer $|u_n|$.

10) On exprimera $F\Big(2(n+1)\pi\Big) - F(2n\pi)$ en fonction de $|u_{2n+1}|$ et $|u_{2n}|$ afin d'exploiter le résultat précédent.

11) et **12)** Utiliser la conclusion de la question **10)**.

13) Mathématiquement classique mais plus délicate. Il vaut mieux chercher les points de la partie suivante.

partie III (Il faut traiter cette partie qui est indépendante)

16) Utiliser le lien évident entre $\sin^{(n+2)}$ et $\sin^{(n)}$.

17) Montrer toutes les propriétés en une seule récurrence.

19) U et V ont beaucoup de zéros évidents.

20) Suivre l'énoncé puis exploiter le résultat précédent.

22) Il y a plusieurs points à démontrer (lesquels ?). On justifiera que Φ conserve le degré pour montrer l'injection de Φ (et de Φ_n). Le reste en découle.

23) P_n est solution de $\mathcal{E}_n$. On la cherchera sous la forme $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ (par identification).

Correction

Partie I

1. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, $\boxed{\text{avec } \ell = 1,\ f \text{ est continue à droite en } 0}$

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   De plus, pour tout $x > 0$, $f\,'(x) = \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}$.

   Au voisinage de 0 : $f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big(x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\Big) = -\frac{x}{3} + o(x)$

   $$\text{Par conséquent, } \left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [0,+\infty[\\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\\ \lim_{0_+} f\,' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\\ f\,'(0) = 0 \end{array}}$$

3. Soit $\varphi : x \mapsto x\cos x - \sin x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = -x\,\sin x$.

   Sur $I_n = \big[n\pi\,,\,(n+1)\pi\big]$, φ est continue et strictement monotone donc établit une bijection de I_n dans $\varphi(I_n)$ qui est un intervalle .

   Or $\varphi(n\pi)\,\varphi((n+1)\pi) = -n(n+1)\pi^2 < 0$ montre que $0 \in \varphi(I_n)$ (c'est une valeur intermédiaire). $\boxed{\text{il existe un unique réel } x_n \text{ dans } I_n \text{ tel que } \varphi(x_n) = 0}$

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n\,\pi \leqslant x_n \leqslant n\,\pi + \pi$ d'où $1 \leqslant \frac{x_n}{n\,\pi} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

   Le théorème des pincements prouve alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ donc $\boxed{x_n \sim n\,\pi}$

5. Pour tout x, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.
   - sur I_0 : φ est décroissante et $\varphi(0) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } I_0}$
   - sur I_{2n} avec $n \geqslant 1$: φ est décroissante et s'annule en x_{2n} .

     Donc sur I_{2n} $(n \geqslant 1)$

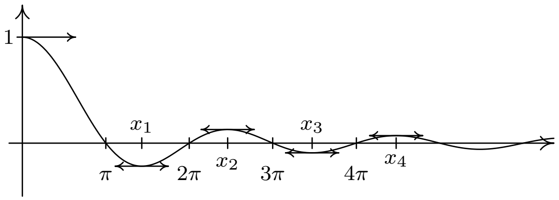
x	$2n\pi$		x_{2n}		$(2n+1)\pi$
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

   - sur I_{2n+1} avec $n \in \mathbb{N}$: φ est croissante et s'annule en x_{2n+1} .

     Donc sur I_{2n+1}

x	$(2n+1)\pi$		x_{2n+1}		$(2n+2)\pi$
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

6. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $n\pi$, avec n entier $n \geqslant 1$.



Partie II

7. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc admet des primitives sur cet intervalle : $\boxed{F \text{ est la primitive qui s'annule en } 0}$

8. Pour tout entier n nous avons $n\pi < (n+1)\pi$. De plus :
   - $\forall\ t \in I_{2n}$: $f(t) \geqslant 0$ donc $\boxed{u_{2n} \geqslant 0}$
   - $\forall\ t \in I_{2n+1}$: $f(t) \leqslant 0$ donc $\boxed{u_{2n+1} \leqslant 0}$

9. Pour tout n, f garde un signe constant sur I_n. Par suite, $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ ce qui donne en faisant le changement de variable $t = s + n\,\pi$: $|u_n| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin s|}{s + n\,\pi} ds$.

   Ainsi $|u_{n+1}| - |u_n| = -\pi \int_0^{\pi} \frac{|\sin s|}{(s+n\,\pi)(s+(n+1)\,\pi)}\, ds \leqslant 0$. $\boxed{(|u_n|) \text{ est décroissante}}$

   De plus : $\forall\ n \geqslant 1$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{n\,\pi} \int_0^{\pi} |\sin s| ds$. Par pincements : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0}$

10. Pour tout entier n nous avons :
   — $F\big((2n+2)\pi\big) - F(2n\pi)$
   $= \Big(F\big((2n+2)\pi\big) - F\big((2n+1)\pi\big)\Big) + \Big(F\big((2n+1)\pi\big) - F(2n\pi)\Big)$
   $= u_{2n+1} + u_{2n} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| \geqslant 0$ d'après la question précédente.
   — De même $F((2n+3)\pi) - F((2n+1)\pi) = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$.
   — Enfin : $\lim_{n\to+\infty} \big(F(2n\pi) - F((2n+1)\pi)\big) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$.

   $\boxed{\text{Les suites } \big(F(2n\pi)\big) \text{ et } \big(F((2n+1)\pi)\big) \text{ sont adjacentes}}$

11. Il en résulte que $\big(F(2n\pi)\big)$ et $\big(F((2n+1)\pi)\big)$ convergent vers une même limite μ.

   Cela implique que $\boxed{\big(F(n\pi)\big) \text{ converge vers } \mu}$

12. De plus, pour tout entier n on a : $F(2n\pi) \leqslant \mu \leqslant F((2n+1)\pi)$
   ce qui donne pour $n = 0$: $\underbrace{F(0)}_{=0} \leqslant \mu \leqslant F(\pi)$.

   Comme f est décroissante sur $[0,\pi]$, on a : $F(\pi) = \int_0^\pi f(t)\,dt \leqslant \int_0^\pi \underbrace{f(0)}_{=1}\,dt \leqslant \pi$.

   Finalement $\boxed{0 \leqslant \mu \leqslant \pi}$

13. L'idée est d'encadrer $x > \pi$ par deux multiples consécutifs de π :

$$n\,\pi \leqslant x < (n+1)\,\pi \Leftrightarrow n \leqslant \frac{x}{\pi} < n+1 \Leftrightarrow n = E\left(\tfrac{x}{\pi}\right)$$

   En notant n_x cette partie entière, on a donc $n_x\,\pi \leqslant x \leqslant n_x\,\pi + \pi$ et

$$|F(x) - F(n_x\pi)| \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{n_x\pi}\int_{n_x\pi}^{(n_x+1)\pi} |\sin t|\,dt \leqslant \frac{1}{n_x\pi}\int_0^\pi |\sin t|\,dt$$

   Comme $\lim_{x\to+\infty} n_x = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} |F(x) - F(n_x\pi)| = 0$, et compte-tenu de la limite de la suite $\big(F(n\pi)\big)$, on obtient : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \mu}$

Partie III

14. Le calcul donne $\boxed{g''(x) = -\,\frac{x^2\,\sin(x) + 2\,x\,\cos(x) - 2\,\sin(x)}{x^3}}$

15. On obtient immédiatement $\boxed{\begin{array}{lll} P_0 = 1 & P_1 = X & P_2 = X^2 - 2 \\ Q_0 = 0 & Q_1 = 1 & Q_2 = 2\,X \end{array}}$

16. En dérivant la relation donnée par l'énoncé, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) \;=\; & \frac{P'_n(x)\sin^{(n)}(x) + P_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q'_n(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+2)}}{x^{n+1}} \\ & -(n+1)\frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

   comme $\sin^{(n)}(x) = -\sin^{(n+2)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x) + Q_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}$$

   avec $\boxed{\begin{array}{l} P_{n+1}(X) = X\,P_n(X) + X\,Q'_n(X) - (n+1)Q_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = X\,Q_n(X) - X\,P'_n(X) + (n+1)P_n(X) \end{array}}$

17. Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété : " P_n de degré n de coefficient dominant 1,
   Q_n de degré $n-1$ de coefficient dominant n,
   P_n et Q_n à coefficients entiers "
   - $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   - Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
   - Alors P_n, Q_n, P'_n et Q'_n sont à coefficients entiers donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi.

     De plus $X\,P_n$ est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et XQ'_n et Q_n sont de degré strictement inférieur à $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1.

     Enfin $X\,Q_n$, $X\,P'_n$ et $(n+1)P_n$ sont de degré n de coefficients dominants respectifs n, n et $n+1$ donc Q_{n+1} est degré n de coefficient dominant $n+1$.
     Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

   On démontre de manière analogue que pour tout entier p, P_{2p} est pair et Q_{2p} est impair et P_{2p+1} est impair et Q_{2p+1} est pair. $\boxed{\begin{array}{c} P_n \text{ a la parité de } n \\ Q_n \text{ a la parité de } n+1 \end{array}}$

18. On a $P_3 = X\,P_2 + X\,Q'_2 - 3\,Q_2$ soit $\boxed{P_3 = X^3 - 6\,X}$

   et $Q_3 = X\,Q_2 - X\,P'_2 + 3\,P_2$ soit $\boxed{Q_3 = 3\,X^2 - 6}$

19. Puisque, pour tout $x > 0$, on a $U(x)\,\sin(x) + V(x)\,\cos(x) = 0$:
   — pour tout entier $k \neq 0$, avec $x = 2\,k\,\pi$: $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ V(2\,k\,\pi) = 0$
   — pour tout entier $k \neq 0$, avec $x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$: $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ U\Big(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\Big) = 0$

   U et V admettent une infinité de racines donc $\boxed{U = V = \mathbf{0} \quad \text{(polynôme nul)}}$

20. En dérivant $n+1$ fois l'égalité $x\,g(x) = \sin x$, on obtient pour tout $x > 0$,
$$x\,g^{(n+1)}(x) + (n+1)\,g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$
d'où en reportant les formules donnant $g^{(n)}(x)$ et $g^{(n+1)}(x)$:
$$\Big(P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x) - x^{n+1}\Big)\sin^{(n+1)}(x) + \Big((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x)\Big)\sin^{(n)}(x) = 0$$
Puisque, à n fixé, l'une des expressions $\sin^{(n+1)}(x)$ ou $\sin^{(n)}(x)$ vaut $\pm\sin(x)$ tandis que l'autre vaut $\pm\cos x$, on peut appliquer le résultat de la question précédente et on a donc :
$$\boxed{P_{n+1}(X) + (n+1)\,Q_n(X) = X^{n+1} \qquad (n+1)\,P_n(X) - Q_{n+1}(X) = 0}$$

21. En reportant $Q_{n+1}(X) = (n+1)P_n(X)$ dans la définition de Q_{n+1} (question **16**), on a $X\Big(Q_n(X) - P'_n(X)\Big) = 0$, ce qui donne (par intégrité) $\boxed{Q_n(X) = P'_n(X)}$

Des formules $P_{n+1}(X) + (n+1)\,Q_n(X) = X^{n+1}$ (question **20**)
$P_{n+1}(X) = X\,P_n(X) + X\,Q'_n(X) - (n+1)\,Q_n(X)$ (question **16**)
on tire l'égalité suivante
$$X^{n+1} - (n+1)\,Q_n(X) = X\,P_n(X) + X\,Q'_n(X) - (n+1)\,Q_n(X)$$
$$\Leftrightarrow \quad X^n = P_n(X) + Q'_n(X) \qquad (\text{ par régularité})$$
dans laquelle $Q_n = P'_n \Rightarrow Q'_n = P''_n$. P_n est solution de $\boxed{\mathcal{E}_n :\ y'' + y = x^n}$

22. L'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est injective. Si on prend deux polynômes T et R d'images égales alors $T - R$ est solution polynômiale de $y'' + y = 0$ dont les solutions sont une combinaison linéaire de cosinus et sinus qui s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$. Donc l'unique solution polynômiale de cette EDL2 homogène est le polynôme nul. $\mathbb{R}[X]$.

Conclusion $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$

23. Cherchons $P_n = \sum_{k=0}^{n} b_k\,X^k$ qui soit solution de $\mathcal{E}_n$. On a
$$\begin{aligned} P_n + P''_n &= \sum_{k=0}^{n} b_k\,X^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,b_k\,X^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k\,X^k + \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\,b_{k+2}\,X^k \\ &= b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(b_k + (k+2)(k+1)b_{k+2}\Big)X^k = X^n \end{aligned}$$
Par suite $b_n = 1$, $b_{n-1} = 0$ et pour tout $k \leqslant n-2$, $b_k = -(k+2)(k+1)\,b_{k+2}$.
— Cela donne : $b_n = 1$, $b_{n-2} = -n(n-1)$, $b_{n-4} = n(n-1)(n-2)(n-3)$,
et, par une récurrence évidente : $\forall\, k \in [\![1, p]\!] \quad b_{n-2k} = (-1)^k\,\frac{n!}{(n-2k)!}$
— et de même : $b_{n-1} = 0$, $b_{n-3} = 0$ et, dans les mêmes conditions : $b_{n-2k+1} = 0$.

Finalement, avec $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$ $\boxed{P = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\,\frac{n!}{(n-2k)!}\,X^{n-2k}}$

24. Les équations différentielles $\mathcal{E}_n$ sont linéaires. Les solutions sont la somme d'une solution particulière de cette équation (P_n en est une), et de la solution générale de $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique $t^2 + 1 = 0$ admet $\pm i$ pour solutions, d'où les solutions de $\mathcal{E}_n$
$$\boxed{x \mapsto P_n(x) + A\,\cos(x) + B\,\sin(x)\,,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$