Devoir Surveillé 06

Le vendredi 23 Janvier 2026

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

1.
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
   (b) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on donnera une équation.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que pour tout entier n *supérieur ou égal à 2* 1' équation $f(x) = n$ admet deux solutions de signes contraires. La solution positive sera notée a_n.
4. Tracer la courbe représentative de f. Faire apparaître a_2 et a_3 sur le graphique. On prendra 1cm pour unité sur les axes et $e \simeq 2,7$
5. Etudier les variations de la suite $(a_n)_{n>1}$
6. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a l'inégalité : $a_n \geqslant \ln n$.
   En déduire la limite de la suite(a_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 2
Soit n, un entier naturel. On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \qquad (E_n)$$

1. Résoudre sur I, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation homogène associée (H_n) :

$$xy' + ny = 0 \qquad (H_n)$$

2. (a) Déterminer des constantes a, b et c telles que, pour tout $x \in I$:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_0) sur l'intervalle I.
3. Résoudre successivement, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:

(a) l'équation (E_1).
(b) l'équation (E_2).
(c) l'équation (E_3).

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note : pour tout $x \geq 0$,
$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$
Résoudre, sur I, l'équation (E_n) en exprimant les solutions au moyen de la fonction F_n.

5. Dans cette question, on va expliciter une expression de $F_n(x)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^1$ et $x \in \mathbb{R}^+$: simplifier $F_n(x) + F_{n+2}(x)$.
   (b) Exprimer $F_1(x)$ et $F_2(x)$ en fonction de $x \in I$.
   (c) Établir, pour tout $n \geq 2$:
   $$\forall x \in I, F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \ln(1+x^2) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}.$$
   (d) Établir, pour tout $n \geq 1$:
   $$\forall x \in I, F_{2n+1}(x) = (-1)^n \operatorname{Arctan}(x) + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$
   (e) Exhiber les solutions de (E_5) sur I.

6. On note f, la solution de (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$.
   (b) Établir que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x.$$
   (c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur I (limites aux bords comprises et justifiées). En particulier, on montrera que f admet une limite finie ℓ en 0 que l'on calculera.
   On posera désormais $f(0) = \ell$.
   (e) Prouver que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   (f) Tracer le graphe de la fonction f sur I.

7. Dans cette question, on généralise des résultats établis ci-dessus dans le cas particulier $n = 1$. Soit un entier $n \geq 1$.
   (a) Etablir que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}.$$
   (b) En déduire la limite de $\dfrac{F_n(x)}{\frac{x^n}{n}}$ lorsque x tend vers 0^+.
   (c) Montrer que, parmi les solutions de (E_n) sur $I =]0, +\infty[$, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note f_n cette fonction, prolongée en 0 par continuité.
   (d) Justifier que f_n est dérivable en 0.
   (e) En n'oubliant pas que f_n est une solution de l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
   (f) Prouver que, pour tout $n \geq 2$:
   $$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\frac{\pi}{4} - fn(1)}{n-1}.$$

Exercice 3
Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[\,n\pi, (n+1)\pi\,]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que ℓ a cette valeur

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et dérivée continue) sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$ et expliciter la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit n⩾1. Montrer que, dans l'intervalle I_n, l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.
4. Déterminer un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle I_0, puis dans les intervalles I_{2n-1} et I_{2n}, pour $n \geqslant 1$.
6. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

7. Justifier l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = F\big((n+1)\pi\big) - F\big(n\pi\big) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$$

8. Quel est le signe de u_n ?
9. Montrez que la suite de terme général $\big|u_n\big|$ est décroissante et converge vers 0.
10. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F\big(2n\pi\big)$ et $F\big((2n+1)\pi\big)$?
11. Montrer que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
12. Justifier l'encadrement $0 \leqslant \mu \leqslant \pi$.
13. Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe. *On*

Partie III

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]\,0, +\infty\,[$.

Il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[\,0, +\infty\,[$, mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ème de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

14. Expliciter $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x),\ g'(x),\ g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe deux polynômes P_n et Q_n, tels que, pour tout x¿0 :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

15. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs. Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?
16. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Il résulte donc des questions **15** *et* **16** *que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

17. Montrer que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.
18. Utilisez les formules établies à la question **16** pour expliciter P_3 et Q_3.
19. Deux polynômes U et V vérifient $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.
20. En partant de la relation $x\,g(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.
21. Justifiez alors la relation $P_n' = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.
22. Soit l'application $\Phi : T \to T + T''$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même. Montrer que Φ est injective. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.
23. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $\dfrac{n}{2}$. Justifiez l'existence d'une famille $\big(a_k\big)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassées de tout signe Π.
24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.