Devoir Surveillé 05

Le mardi 9 Janvier 2024

8h-12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$(E) \qquad xy' - y = \frac{x^2}{1-\operatorname{ch} x}$$

1. (a) Démontrer que pour tout réel x on a :

$$\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch}(2x)}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}$$

   (b) En déduire que pour tout réel x strictement positif,

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

2. (a) Calculer pour tout réel x strictement positif $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch} u - 1}du$ en effectuant le changement de variable $t = \tanh \frac{u}{2}$

   (b) En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{-1}{\operatorname{ch} x - 1}$

3. Résoudre (E)

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$

   (a) Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire ?

   (b) Etudier la parité de f.

   (c) Calculer la limite de f en $+\infty$

   (d) Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ et que

   pour tout $x \neq 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1}$

   (e) En déduire les variations de f.

Exercice 2

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.
   (a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.
   (b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.
3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{aligned} a &= n^3 + 2n^2 - 3n \\ b &= 2n^2 - n - 1 \end{aligned}$$

   Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.
4. (a) On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
   (b) En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.
   (c) Application :
   Déterminer Δ pour $n = 2001$;
   Déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 3

On se propose de déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

1. En étudiant rapidement les variations sur $]-1,+\infty[$ de $x \mapsto \ln(1+x) - x$,
   justifier que $\forall\, x > -1 \quad \ln(1+x) \leqslant x$
   De même, montrer que $\forall\, x \geqslant 0\,, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
2. On note $v_k = \frac{k^k}{k!}$. Simplifier $\dfrac{v_{k+1}}{v_k}$.
   Utiliser la question précédente pour montrer

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{2\,k} \leqslant \ln\left(\tfrac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leqslant 1$$

3. Vérifier que $\forall\, k \geqslant 2\,, \quad \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \leqslant \frac{-1}{k}$. En déduire que

$$\forall\, k \geq 2\,, \quad 1 + \frac{\ln(k-1) - \ln(k)}{2} \leqslant \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leqslant 1$$

4. Déduire de la question précédente un encadrement de $\ln(v_n) - \ln(v_2)$.
   En déduire que (u_n) converge vers e^{-1}.

Exercice 4

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

▶ La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
▶ La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
▶ La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
▶ La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.
   Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t)\,dt$.
On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

6. **Dans cette question seulement**, φ est définie, pour tout t réel, par $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
   (a) Montrer que pour x et y réels, $\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.
   (b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.
   (c) Que vaut ℓ ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

7. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.
8. (a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
   On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
   (c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
   (d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.
   Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III

9. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x) + 1\big)$
   (on pourra admettre les résultats de la question **-8-**).
10. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
11. (a) On suppose dans cette question **-a-**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour x réel, montrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.
    (b) On suppose dans cette question **-b-**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
    Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.
12. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
    (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
    (b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?
13. Étudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
14. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.
    (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.
    (b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

15. Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.
16. Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).