

## Devoir Surveillé 05 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

On considère l'équation différentielle définie sur  $]0; +\infty[$  par : (E)  $xy' - y = \frac{x^2}{1 - \operatorname{ch} x}$

$$1. (a) \forall x \in \mathbb{R}, 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{2} + 1 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$$

$$\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$$

Conclusion : pour tout réel  $x$  on a :

$$\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2} \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2}$$

$$(b) \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}} \text{ car } x > 0 \Rightarrow \operatorname{sh} \frac{x}{2} > 0$$

$$\text{alors } \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \sqrt{\frac{(\operatorname{ch} x - 1)^2}{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{|\operatorname{ch} x - 1|}{|\operatorname{sh} x|} =$$

$$\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} \text{ car } \operatorname{sh} x > 0 \text{ et } \operatorname{ch} x > 1$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

2. (a) Soit  $x$  un réel strictement positif. La fonction :  $u \mapsto \tanh \frac{u}{2}$  est de classe  $C^1$  sur  $[1, x]$  et réalise une bijection de  $[1, x]$  sur  $[\tanh \frac{1}{2}; \tanh \frac{x}{2}]$

$$t = \tanh \frac{u}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} (1 - \tanh^2 \frac{u}{2}) du \Rightarrow du = \frac{2dt}{1-t^2} \text{ par ailleurs } \operatorname{ch} u - 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{2} - 2 = 2 \left( \frac{1}{1 - \tanh^2 \frac{u}{2}} - 1 \right) = \frac{2t^2}{1-t^2}$$

$$\text{Ainsi } \int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch} u - 1} du = \int_{\tanh \frac{1}{2}}^{\tanh \frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{2t^2}{1-t^2}} \frac{2dt}{1-t^2} = \left[ -\frac{1}{t} \right]_{\tanh \frac{1}{2}}^{\tanh \frac{x}{2}} = \frac{1}{\tanh \frac{1}{2}} -$$

$$\frac{1}{\tanh \frac{x}{2}}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0, \int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch} u - 1} du = \frac{1}{\tanh \frac{1}{2}} - \frac{1}{\tanh \frac{x}{2}}$$

(b)  $g$  est continue sur  $]0; +\infty[$  en tant qu'inverse d'une fonction continue avec un dénominateur ne s'annulant pas sur  $]0; +\infty[$ . D'après la question précédente, une primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction

$g : x \mapsto \frac{-1}{\operatorname{ch} x - 1}$  est la fonction  $G$  définie par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, G(x) = \frac{1}{\tanh \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

3. • Equation homogène :  $xy' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$  : on pose  $a(x) = -\frac{1}{x}$ .  $a$  est une fonction continue sur  $]0; +\infty[$ . Une primitive de  $a$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $A$  définie par  $A(x) = -\ln|x| = -\ln x$  car  $x > 0$

$$\forall x > 0, e^{-A(x)} = e^{\ln x} = x$$

$$\text{Donc } \mathcal{S}_{EH} = \{f_k : x \mapsto kx, k \in \mathbb{R}\}$$

• Recherche d'un solution particulière avec la méthode de la variation de la constante :

on pose  $y_P(x) = k(x)x$  où  $k$  est une fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Alors  $y'_P(x) = k'(x)x + k(x)$ . On reporte dans (E) :

$$x(k'(x)x + k(x)) - k(x)x = \frac{x^2}{1 - \operatorname{ch} x} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{ch} x} = g(x) \Rightarrow k(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

d'après la question précédente.

$$\text{Alors une solution particulière est : } y_P(x) = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

• Conclusion :  $\mathcal{S}_E \{f_k : x \mapsto kx + \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}, k \in \mathbb{R}\}$

4. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$

(a)  $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$  et  $\operatorname{ch} x - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  alors  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  :

$f$  est prolongeable par continuité en 0.

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(-x) = \frac{-x \operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x) - 1} = \frac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = f(x)$  donc  $f$  est paire.

(c)  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x e^x}{e^x} = x$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Remarque :**  $\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\text{et } f(x) - x = \frac{x \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x + x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{x(1 - e^{-x})}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$$

ainsi la droite d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe représentative de  $f$  en  $+\infty$

(d)  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]0; +\infty[$  et  $] -\infty; 0[$  en tant que quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur ne s'annulant pas sur chacun des intervalles  $]0; +\infty[$  et  $] -\infty; 0[$ .

$$\text{pour tout } x \neq 0, f'(x) = \frac{(\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x)(\operatorname{ch} x - 1) - x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} =$$

$$\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch}^2 x - x \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - 1) + x(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) - x \operatorname{ch} x}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} =$$

$$\frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x - 1) + x(1 - \operatorname{ch} x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x - 1)(\operatorname{sh} x - x)}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

Conclusion : pour tout  $x \neq 0, f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{\operatorname{ch} x - 1}$

(e) Sit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \operatorname{sh} x - x$ .  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \operatorname{ch} x - 1 > 0$  donc  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $h(0) = 0$  donc on en déduit le signe de  $h(x)$  :

$$\forall x > 0, h(x) > 0 \text{ et } \forall x < 0, h(x) < 0$$

Par ailleurs  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{ch} x - 1 > 0$  donc  $f'$  est du signe de  $h$ .

Ainsi  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $] - \infty; 0[$

|         |           |                                   |           |
|---------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$                               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $\parallel$                       | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow \quad 2 \quad \nearrow$ | $+\infty$ |

**Exercice 2**

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. On a  $-2 \times n + 1 \times (2n + 1) = 1$ , donc d'après le théorème de Bezout  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux.

2. (a)  $2\alpha - \beta = 2(n + 3) - (2n + 1) = 2n + 6 - 2n - 1 = 5$ .

Comme  $\delta$  divise  $\alpha$  et  $\beta$ , il divise  $2\alpha - \beta$  c'est-à-dire 5.

Donc  $\delta \in \{1; 5\}$ .

(b)  $\alpha$  multiple de 5 s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha = 5k = n + 2$ .

$\beta$  multiple de 5 s'il existe  $k' \in \mathbb{N}$  tel que  $\beta = 5k' = 2n + 1$ . Le nombre  $2\alpha - \beta$  est lui aussi un multiple de 5 :

$$2\alpha - \beta = 2(n + 3) - (2n + 1) = 2n + 6 - 2n - 1 = 5.$$

3.  $1 + 3 - 3 = 0$ , donc  $n^3 + 2n^2 - 3n$  est divisible par  $n - 1$ .

$$n^3 + 2n^2 - 3n = n(n^2 + 2n - 3) = n[(n + 1)^2 - 1 - 3] = n[(n + 1)^2 - 4] = a = n(n + 3)(n - 1).$$

De même  $2 - 1 - 1 = 0$ , donc  $2n^2 - n - 1$  est divisible par  $n - 1$ ;  $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ ;  $2n^2 - n - 1 = 2(n - 1)(n + \frac{1}{2}) = b = (n - 1)(2n + 1)$ .

4. (a)  $\delta$  divise  $n + 3$  et  $2n + 1$ , donc  $\delta$  divise  $n(n + 3)$  et  $2n + 1$ , donc  $\delta$  divise  $d$  plus grand commun diviseur de  $n(n + 3)$  et  $2n + 1$ .

Mais on a vu que  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux, donc :

$$d = \operatorname{PGCD}[n(n + 3); 2n + 1] = \operatorname{PGCD}(n + 3; 2n + 1) = \delta.$$

(b) D'après la question précédente :

- si  $n \equiv 2 \pmod{5}$ , alors  $\Delta = 5(n - 1)$ ;
- si  $n$  n'est pas congru à 2 modulo 5, alors  $\Delta = n - 1$ .

(c) Application :

- Avec  $n = 2001 : 2001 \equiv 1 \pmod{5}$ , donc  $\Delta = 2001 - 1 = 2000$ .
- Avec  $n = 2002 : 2001 \equiv 2 \pmod{5}$ , donc  $\Delta = 5 \times 2001 = 10005$ .

**Exercice 3**

1. Sur  $] - 1, +\infty[$ , la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = \ln(1 + x) - x$  se dérive en

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$
 dont le signe est évident, d'où le tableau des variations

|            |            |     |            |
|------------|------------|-----|------------|
| $x$        | $-1$       | $0$ | $+\infty$  |
| $\varphi'$ | $+$        | $-$ |            |
| $\varphi$  | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

$\varphi$  est donc négative d'où  $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$

Pour  $x \geq 0$ , on note  $\psi(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$ . Sa dérivée  $\psi'(x) = \frac{x^2}{1+x}$  est positive.  $\psi$  est croissante et  $\forall x \geq 0, \psi(x) \geq \psi(0) = 0$  d'où

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$$

2. On trouve  $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$  d'où  $\ln \frac{v_{k+1}}{v_k} = k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

En utilisant la question précédente avec  $x = \frac{1}{k}$  qui vérifie  $x > -1$  et  $x \geq 0$

on obtient  $k \left(\frac{1}{k} - \frac{(1/k)^2}{2}\right) \leq \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq k \frac{1}{k}$  soit  $1 - \frac{1}{2k} \leq \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1$

3.  $k \geq 2$ . Comme  $\ln \frac{k-1}{k} = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ , avec  $x = \frac{-1}{k} > -1$ , selon la question 1 :  $\ln \frac{k-1}{k} \leq \frac{-1}{k}$ , d'où  $\ln(k - 1) - \ln(k) \leq \frac{-1}{k}$  puis  $1 + \frac{\ln(k-1) - \ln(k)}{2} \leq 1 - \frac{1}{2k}$ .

En utilisant le résultat de la question 2 :  $1 + \frac{\ln(k-1) - \ln(k)}{2} \leq \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1$

4. En sommant les inégalités précédentes pour  $k$  variant de 2 à  $n - 1$ , suivant le principe des dominos, on obtient  $n - 2 + \frac{\ln(1) - \ln(n-1)}{2} \leq \ln \frac{v_n}{v_2} \leq n - 2$

c'est-à-dire (puisque  $v_2 = 2$ ) :  $\ln(2) + n - 2 - \frac{\ln(n-1)}{2} \leq \ln(v_n) \leq \ln(2) + n - 2$

En divisant par  $n > 0$ , par pincement, on montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(v_n) = 1$ .

Puisque  $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{v_n}}$ , nous avons  $\ln(u_n) = -\frac{1}{n} \ln(v_n)$  qui tend vers -1.

CONCLUSION

$$(u_n) \text{ converge vers } e^{-1}$$

**Exercice 4**

$\varphi$  continue positive (sauf en un nombre fini de points),  $\lim_{\infty} \varphi = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

$$(E_x) : \int_x^y \varphi(t) dt = 1 \quad \text{a pour solution } y = f(x).$$

**Partie I**

$\varphi(x) = e^x$  vérifie les conditions avec  $\ell = +\infty$ .

1. L'équation  $(E_x)$  devient  $\int_x^y e^t dt = 1 \Leftrightarrow [e^t]_x^y = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x$ .

Comme  $1 + e^x > 0$ ,  $(E_x)$  admet une solution unique  $y$  où

$$y = f(x) = \ln(1 + e^x)$$

2.  $f$  est définie, continue dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$ .

Les limites aux bornes sont immédiates.

On obtient le tableau des variations ci-dessous

|      |           |                    |
|------|-----------|--------------------|
| $x$  | $-\infty$ | $+\infty$          |
| $y'$ |           | +                  |
| $y$  | 0         | $\nearrow +\infty$ |

3. Étudions rapidement la différence  $y - x$  :

$$f(x) - x = \ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$

qui montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0$  et  $f'(x) - x > 0$ .

La droite d'équation  $y = x$  est asymptote, la courbe est au dessus

4. Au voisinage de 0, nous avons :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1 + e^x = 2 \left( 1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{=u \rightarrow 0} \right)$$

$$\text{d'où } f(x) = \ln(2) + \ln(1 + u) = \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

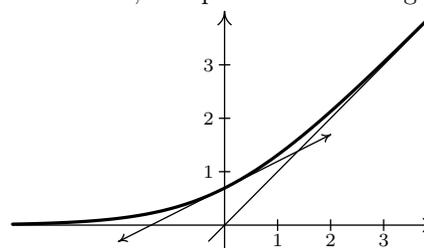
ce qui donne

$$f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

d'où la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $x = 0$  et la position locale

tangente d'équation  $y = \ln(2) + \frac{x}{2}$ ,  $\mathcal{C}$  localement au dessus

5. Ci-dessous, la représentation où figurent les différents résultats obtenus



**Partie II**

$$\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t) dt$$

6. Dans cette question,  $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ .

(a) Pour tous réels  $x$  et  $y$ , nous avons

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} (\text{Arctan } y - \text{Arctan } x)$$

Comme  $\text{Arctan } y < \frac{\pi}{2}$  et  $\text{Arctan } x > -\frac{\pi}{2}$ , nous avons  $\int_x^y \varphi(t) dt < 1$

(b) Ainsi,  $\int_x^y \varphi(t) dt = 1$  est impossible : l'équation  $(E_x)$  n'a pas de solution

(c) La limite en  $+\infty$  de  $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$  est immédiate :  $\ell = 0$

Désormais :  $\ell \neq 0$ .

7. Il est immédiat que l'équation  $(E_x)$  s'écrit  $(E_x) : \Phi_x(y) = 1$

8. (a)  $\varphi$  étant continue,  $\Phi_x$  est la primitive de  $\varphi$  qui s'annule en  $x$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Sa dérivée est  $\varphi$  qui est positive (ou nulle en un nombre fini de points) donc  $\Phi_x$  est strictement croissante.  $\Phi_x$  est continue strictement croissante

Nous pouvons en déduire que l'équation  $(E_x)$  admet au plus une solution.

(b)  $\varphi$  étant strictement positive,  $\ell = \lim_{+\infty} \varphi$  vérifie soit  $\ell = +\infty$ , soit  $\ell \in \mathbb{R}_+$ .

• Cas  $\ell = +\infty$  : Considérons un réel  $A > 0$ .  $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$  montre  $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A$

• Cas  $\ell \in \mathbb{R}_+$  : donc  $\ell > 0$  (puisque  $\ell \neq 0$ ). Avec  $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ ,  $\lim_{+\infty} \varphi = \ell$  montre

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \ell - \frac{\ell}{2} \leq \varphi(t) \leq \ell + \frac{\ell}{2} \Rightarrow \underbrace{A = \frac{\ell}{2}}_{A > 0} \leq \varphi(t)$$

Dans les deux cas :  $\exists A > 0, \exists t_0 \in \mathbb{R}, t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geq A$

(c) Avec les notations précédentes, pour  $u > t_0$  nous avons

$$\Phi_x(u) = \underbrace{\int_x^{t_0} \varphi(t) dt}_{=K \text{ constante}} + \int_{t_0}^u \varphi(t) dt \geq K + (u - t_0) A$$

Ceci prouve que  $\lim_{+\infty} \Phi_x = +\infty$  donc  $\exists u \in \mathbb{R}, \Phi_x(u) > 1$

(d)  $\Phi_x$  est continue sur  $[x, u]$  vérifie  $\underbrace{\Phi_x(x)}_{=0} < 1 < \Phi_x(u)$ . Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un réel  $t$  vérifiant  $\Phi_x(t) = 1$ . L'équation  $(E_x)$  admet une solution, unique d'après **8-a**.

$(E_x)$  admet une solution unique

**Partie III**

9. Rappelons que  $\varphi$  est continue, donc  $\Phi_0 : y \mapsto \int_0^y \varphi$  est une primitive de  $\varphi$ .

$f(x)$  est la solution de  $(E_x)$  se traduit par  $f(x) > 0$  et

$$\int_x^{f(x)} \varphi(t) dt = 1 \Leftrightarrow [\Phi_0]_x^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow \Phi_0(f(x)) = \Phi_0(x) + 1$$

Continue strictement croissante,  $\Phi_0$  induit une bijection de  $\mathbb{R}$  vers

$$\underbrace{] \lim_{-\infty} \varphi, \lim_{+\infty} \Phi_0[}_{=] \alpha, +\infty[}$$

En notant  $\Phi_0^{-1}$  l'application réciproque, l'égalité précédente est équivalente à

$$f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$$

*Note* : on pouvait aussi composer l'égalité par  $\Phi_0^{-1}$  en s'assurant que  $\Phi_0(x) \in ]\alpha, +\infty[ \Rightarrow \Phi_0(x) + 1 \in ]\alpha, +\infty[$ .

10. La fonction  $\Phi_0$  étant continue strictement croissante, il en est de même pour  $x \mapsto \Phi_0(x) + 1$  et sa réciproque  $(\Phi_0)^{-1}$ .

Composée de deux telles fonctions  $f$  est continue strictement croissante

11. (a) La bijection continue  $\Phi_0$  est dérivable, et sa dérivée  $\varphi$  ne s'annule pas (hypothèse de cette question **-a-**). L'application réciproque est donc dérivable et vérifie  $(\Phi_0^{-1})' = \frac{1}{\varphi \circ \Phi_0^{-1}}$ . Ainsi, composée de fonctions dérivables,  $f$  est dérivable avec

$$f'(x) = (\Phi_0^{-1})'(\Phi_0(x) + 1) \cdot \Phi_0'(x) = \frac{\Phi_0'(x)}{\varphi(\Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1))} : \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$$

(b) Dans cette question,  $\varphi(x_0) \neq 0$  strictement positive sur  $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$  sauf en  $f(x_0)$  où  $\varphi(f(x_0)) = 0$ .

► Le raisonnement du **-a-** s'applique en tout point  $x$  tel que  $\varphi(f(x)) \neq 0$ , donc  $f$  est dérivable sur  $V - \{x_0\}$ , avec  $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$ .

►  $f$  et  $\varphi$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , donc

$$\lim_{x_0} \varphi = \varphi(x_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x_0} \varphi \circ f = \varphi \circ f(x_0) = 0$$

ce qui montre que  $\lim_{x_0} f' = \pm\infty$

► En résumé :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } V \\ f \text{ dérivable sur } V - \{x_0\} \\ f' \text{ a une limite infinie en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ non dérivable en } x_0 \\ \text{tangente verticale en } x_0 \text{ pour } \mathcal{C} \end{array} \right.$$

12. Dans cette question  $\ell = +\infty$  et  $\varepsilon$  est un réel strictement positif.

(a) Puisque  $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ , nous avons  $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t, t \geq a \Rightarrow \varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$

(b) Pour  $x \geq a$  nous avons :

►  $\varphi \geq 0$  et  $\int_x^{f(x)} \varphi = 1 > 0$  entraînent  $x < f(x)$

► Sur  $[x, f(x)] \subset [a, +\infty[$ ,  $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$  donc

$$1 = \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \geq \int_x^{f(x)} \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{f(x) - x}{\varepsilon} \Rightarrow f(x) - x \leq \varepsilon \quad \text{Comme}$$

$$f(x) - x \geq 0, \text{ nous avons finalement } \quad x \geq a \Rightarrow |f(x) - x| \leq \varepsilon$$

Ceci prouve que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$

donc que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$

13. Dans cette question  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  :

► Comme  $\lim_{+\infty} \varphi = \ell$ , nous avons  $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t, a \leq t \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq \varphi(t) \leq \ell + \varepsilon$

► Pour la même raison qu'au **12-b-** :  $x < f(x)$

► Ainsi, pour  $x \geq a$  :  $\int_x^{f(x)} (\ell - \varepsilon) dt \leq \int_x^{f(x)} \varphi(t) dt \leq \int_x^{f(x)} (\ell + \varepsilon) dt$   
 soit  $(\ell - \varepsilon)(f(x) - x) \leq 1 \leq (\ell + \varepsilon)(f(x) - x)$  d'où (puisque  $f(x) - x > 0$ )  
 $\ell - \varepsilon \leq \frac{1}{f(x) - x} \leq \ell + \varepsilon$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) - x} = \ell$

Finalement :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{\ell}$  La droite d'équation  $y = x + \frac{1}{\ell}$  est asymptote

14. Dans cette question  $\varphi$  est paire,  $\Gamma$  est le graphe de  $f$ .

(a) Le changement de variable  $u = -t$  (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) montre que

$$\int_x^y \varphi(t) dt = \int_{-x}^{-y} \underbrace{\varphi(-t)}_{=\varphi(t)} (-dt) = \int_{-y}^{-x} \varphi(t) dt$$

Ainsi :  $\int_x^y \varphi(t) dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(t) dt = 1$  donc  $(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow (-y, -x) \in \Gamma$

(b) Ainsi  $\Gamma$  admet la droite d'équation  $y = -x$  pour axe de symétrie

**Partie IV**

Dans cette partie  $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

15. Il est clair que la fonction  $\varphi$  est continue (polynôme), strictement positive sauf en deux points ( $x = \pm 1$ ), paire, et que  $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ .

16. Nous savons donc que :

- $f$  est strictement croissante,
- $\Gamma$  admet la droite d'équation  $y = x$  pour asymptote,
- et la droite d'équation  $y = -x$  comme axe de symétrie.

D'autre part, on a une tangente horizontale en  $x_0$  si  $\varphi(x_0) = 0$  et  $\varphi'(x_0) \neq 0$ ,

► donc ici pour  $x = -1$ , puisque

★  $\varphi(1) = 0$

★  $\varphi'(1) \neq 0$  puisque  $f(1) \neq -1$  (on vérifie facilement que

$\int_1^{-1} \varphi \neq \pm 1$ )

$f(1) \neq 1$  (puisque  $\int_1^1 \varphi = 0 \neq 1$ )

► Même raisonnement en  $x = -1$  On obtient les tangentes verticales par symétrie.

D'où la représentation donnée ci-contre

