Devoir Surveillé 05 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -A + 2I_3$

2. Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A + I_3)$

3. - Pour $n = 0$, $\begin{cases} 0A + 1I_3 = I_3 \\ A^0 = I_3 \end{cases}$, donc la relation est vraie au rang 0 ;
   - Soit n un entier naturel quelconque ; on suppose que $A^n = u_n A + v_n I_3$ alors

   $$A^{n+1} = (u_n A + v_n I_3)A = u_n A^2 + v_n A = u_n(-A + 2I_3) + v_n A = (-u_n + v_n)A + 2u_n I_3$$

   donc $A^{n+1} = (u_{n+1}A + v_{n+1}I_3)$. La relation est héréditaire ; donc :
   pour tout n entier naturel, $A^n = u_n A + v_n I_3$

4.
   (a) $x_n = u_n + v_n$, donc

   $$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = -u_n + v_n + 2u_n = u_n + v_n = x_n,$$

   donc la suite (x_n) est constante et pour tout n entier naturel, $x_n = x_0 = u_0 + v_0 = 1$;

   (b) $y_n = 2u_n - v_n$, donc

   $$y_{n+1} = 2u_{n+1} - v_{n+1} = -2u_n + 2v_n - 2u_n = -4u_n + 2v_n = -2y_n.$$

   Donc la suite (y_n) est géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $y_0 = -1$, donc $y_n = -(-2)^n$.

   (c) On a $\begin{cases} x_n = u_n + v_n \\ y_n = 2u_n - v_n \end{cases}$, d'où : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3}(x_n + y_n) \\ v_n = \dfrac{1}{3}(2x_n - y_n) \end{cases}$, soit : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - (-2)^n\right) \\ v_n = \dfrac{1}{3}\left(2 + (-2)^n\right) \end{cases}$;

5. Et donc : $A^n = \dfrac{1}{3}\left(1 - (-2)^n\right)A + \dfrac{1}{3}\left(2 + (-2)^n\right)I_3$, soit

   $$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$

   pour $n = -1$,

   $$\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-1}\right].I_3 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = A^{-1}$$

d'après la question 2). Donc : la formule est encore valable pour $n = -1$

Exercice 2

Devoir surveillé 4

Exercice 3

Partie A

1. (a) On a $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{B}| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, ce qui signifie que B est à 1 de A donc appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

   (b) On a $\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}}{z_\mathrm{F} - z_\mathrm{A}}\right) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, soit

   $\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) + 2k\pi$ et donc

   $\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Le triangle ABF est isocèle ($\mathrm{AB} = \mathrm{AF} = 1$) et a un angle au sommet de mesure $\dfrac{\pi}{3}$: il est donc équilatéral.

   Le point B appartient donc à la médiatrice de [AF] et au cercle $(\mathcal{C})$.

2. (a) On a $z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   $z_\mathrm{E} - z_\mathrm{A} = 1 + (z_\mathrm{B})^2 - 1 = (z_\mathrm{B})^2 = \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} =$

   $1 + 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (b) Le résultat précédent montre que :

   $z_\mathrm{E} - z_\mathrm{A} = 3\left(z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}\right)$ ou encore

   $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ égalité vectorielle qui montre que E appartient à la droite (AB) et a pour abscisse 3 si le repère choisi est le couple (A, B).

3. On construit E tel que AE = 3AB.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. On a $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{z_{M'} - z_{\text{A}}}{z_M - z_{\text{A}}}$.

   Un argument de ce quotient est donc simplement $\left(\overrightarrow{\text{A}M} \; ; \; \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$.

2. Si $\overrightarrow{\text{A}M'} \neq \overrightarrow{0}$, les points sont alignés si et seulement si l'angle de la question précédente est nul, autrement dit si le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un réel soit puisque $z'-1 = z^2$, si le quotient $\dfrac{z^2}{z-1}$ est réel.

   Si $\overrightarrow{\text{A}M'} = \overrightarrow{0}$, alors $z^2 = 0$, donc $\dfrac{z^2}{z-1}$ est encore un réel (ici nul).

Exercice 4

1. L'équation s'écrit $x^2 + y^2 = 4$. Comme $0 < x^2 < 4 \Rightarrow 0 < x < 2$ et de même $0 < y^2 < 4 \Rightarrow 0 < y < 2$, le seul couple à essayer est $(1\,;\,1)$ qui n'est pas solution.

   • On peut aussi écrire : $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - y^2 \Leftrightarrow x^2 = (2+y)(2-y)$: la seule possibilité d'avoir un carré est que $2 + y = 2 - y \Leftrightarrow 2y = 0$ ce qui n'est pas possible.

2. (a) On a donc $x^2 + y^2 = p^2$.

   • Si x et y sont pairs leurs carrés sont pairs et la somme $x^2 + y^2$ aussi : ce n'est pas possible puisque l'on a vu que p est premier supérieur à 2, donc impair, donc son carré est aussi impair ;

   • Si x et y sont impairs leurs carrés sont impairs et la somme $x^2 + y^2$ est paire : même impossibilité puisque p^2 est impair.

   Donc x et y sont de parités différentes.

   (b) x et y sont non nuls donc $x^2 + y^2 = p^2 \Rightarrow 0 < x^2 < p^2 \Rightarrow 0 < x < p$: x ne peut donc diviser p qui est premier. Même raisonnement pour y.

   (c) Supposons qu'il existe un diviseur d commun à x et à y. Il existe donc deux naturels k et k' tels que $x = kd$ et $y = k'd$.

   On a donc $k^2d^2 + k'^2d^2 = p^2 \Leftrightarrow d^2\left(k^2k'^2\right) = p^2$.

   Ceci signifie que d^2 divise p^2. p étant premier les seuls diviseurs de p^2 sont $1, p$ et p^2 ;

   • si $d^2 = p^2$, alors $d = p$, alors x et y sont des multiples de p ce qui n'est pas possible d'après la question précédente ;

   • si $d^2 = p$, p aurait trois diviseurs 1, p et p^2, ce qui n'est pas possible puisque p est premier ;

   • il reste donc $d = 1$, ce qui signifie que x et y sont premiers entre eux.

3. (a) On a $x^2 + y^2 = \left|u^2 - v^2\right|^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 =$ $u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2 = p$.

   Ceci montre que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| \; ; \; 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.

   (b) • Si $p = 5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, on peut prendre $u = 1$ et $v = 2$.

   Le couple solution est donc $\left(\left|1^2 - 2^2\right| \; ; \; 2 \times 1 \times 2\right) = (3 \; ; \; 4)$.

   On retrouve le triplet pythagoricien $(3\,;\,4\,;\,5)$: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

   • Si $p = 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$, on peut prendre $u = 2$, $v = 3$.

   Le couple solution est donc $\left(\left|2^2 - 3^2\right| \; ; \; 2 \times 2 \times 3\right) = (5 \; ; \; 12)$.

   $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

4. (a) • $p = 3 = 1 + 2 = 2 + 1$, donc p n'est pas la somme de deux carrés.

   • $p = 7 = 1 + 6 = 4 + 3$,donc p n'est pas la somme de deux carrés.

   (b) • $x^2 + y^2 = 9$; on a donc $x^2 < 9$ et $y^2 < 9$ ou encore $x < 3$ et $y < 3$.

   On a vu que x et y sont de parités différentes on ne peut avoir que $(1\,;\,2)$ ou $(2\,;\,1)$ comme candidats : ils ne sont pas solutions car $1 + 4 = 5 \neq 9$;

   • $x^2 + y^2 = 49$; on a donc $x^2 < 49$ et $y^2 < 49$ ou encore $x < 7$ et $y < 7$.

   Compte tenu de la parité différente de x et de y les couples solutions peuvent être :

   $(1\,;\,2)$, $(1\,;\,4)$, $(1\,;\,6)$, $(2\,;\,1)$, $(2\,;\,3)$, $(2\,;\,5)$, $(3\,;\,2)$, $(3\,;\,4)$, $(3\,;\,6)$, $(4\,;\,1)$, $(4\,;\,3)$,

   $(4\,;\,5)$, $(5\,;\,2)$, $(5\,;\,4)$, $(5\,;\,6)$, $(6\,;\,1)$, $(6\,;\,3)$, $(6\,;\,5)$.

   Aucun de ces couples n'est solution, donc l'équation $x^2 + y^2 = 49$ n'a pas de solution.

Exercice 5
PARTIE I

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \;—\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \right\}$$
$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{E} \;—\; f \neq 0 \text{ et } \exists\, x \in \mathbb{R}\; f(x) = 0 \right\}$$

1. La fonction "cos" est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et

   $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$ est bien connu. $\boxed{\cos \in \mathcal{E}}$

2. C'est une démonstration simple du cours : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x+y) &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x\, e^y + e^{-x} e^{-y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x\right)\left(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y\right) + \left(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\right)\left(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y\right)
\end{aligned}$$

   soit, en développant : $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

   En remplaçant "y" par "$-y$ ", on obtient $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

En ajoutant, il vient : $\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)=2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y$.

La fonction "ch" étant continue, nous pouvons dire $\boxed{\operatorname{ch}\in\mathcal{E}}$

3. Si $f\in\mathcal{E}$, soit $f_\alpha : x\mapsto f_\alpha(x)=f(\alpha x)$.
   - ◇ f_α est définie, continue sur $\mathbb{R}$ composée de f et de $x\mapsto \alpha x$ continues
   - ◇ $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, $f_\alpha(x+y)+f_\alpha(x-y)=f(\alpha x+\alpha y)+f(\alpha x-\alpha y)$ or $f\in\mathcal{E}$ donc $=2f(\alpha x)f(\alpha y)=2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$

   Ceci montre bien que $\boxed{f\in\mathcal{E}\Rightarrow f_\alpha\in\mathcal{E}}$

4. (a) Avec $x=y=0$, la propriété devient $f(0)+f(0)=2f(0)^2$

   donc $f(0)=f(0)^2 \Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0$ Conclusion $\boxed{f(0)\in\{0,1\}}$

   (b) Si $f(0)=0$, alors $\forall\, x\in\mathbb{R}\quad f(x+0)+f(x-0)=2f(x)\underbrace{f(0)}_{=0}=0$

   donc $2f(x)=0$. Conclusion $\boxed{f(0)=\mathbf{0}\Rightarrow f=0 \text{ fonction nulle}}$

   (c) Si $f(0)=1$, alors $\forall\, x\in\mathbb{R}\quad f(0+x)+f(0-x)=2\underbrace{f(0)}_{=1}f(x)$

   donc $f(-x)=f(x)$ Conclusion $\boxed{f(0)=1\Rightarrow f \text{ est paire}}$

PARTIE II

A - $f\in\mathcal{E}$ et $f(0)=1$ *(donc f est paire)*

Notons que la continuité de f montre son intégrabilité.

5. (a) $\forall\, r>0$, utilisons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $x+y=u \quad dx=du$

   qui donne immédiatement $\boxed{\int_0^r f(x+y)\,dx=\int_y^{y+r} f(u)\,du}$

   (b) On fixe $x\in\mathbb{R}$ et on intègre par rapport à y l'égalité $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

   $$\int_0^r f(x+y)\,dy+\int_0^r \underbrace{f(x-y)}_{=f(y-x)}\,dy=2\int_0^r f(x)f(y)\,dy$$

   $$\Leftrightarrow \int_0^r f(x+y)\,dy+\int_0^r f(-x+y)\,dy=2\int_0^r f(x)f(y)\,dy \quad f \text{ paire}$$

   $$\Leftrightarrow \int_x^{x+r} f(u)\,du+\int_{-x}^{-x+r} f(u)\,du=2f(x)\int_0^r f(y)\,dy \quad \text{voir (a)}$$

   f étant paire, on obtient bien $\boxed{\int_x^{x+r} f(u)\,du+\int_{x-r}^{x} f(u)\,du=2f(x)\int_0^r f(y)\,dy}$

6. (a) La fonction f étant continue et $f(0)=1$, il existe un voisinage de 0 où $f(x)>\dfrac{1}{2}$.
   Un tel voisinage contient un intervalle de la forme $[0,r]$ (avec $0<r$). ainsi

   $\exists\, r>0,\quad \int_0^r f(y)\,dy\geqslant\int_0^r \frac{1}{2}\,dy=\frac{r}{2}>0$ $\boxed{\exists\, r>0\quad \int_0^r f(y))\,dy>0}$

   Notons $\boxed{c=2\int_0^r f(y))\,dy}$

   (b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur$\mathbb{R}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$). En utilisant **5-b)**, nous avons

   $$f(x)=\frac{\int_x^{x+r} f(u)\,du+\int_{x-r}^{x} f(u)\,du}{2\int_0^r f(y)\,dy}=\frac{F(x+r)-F(x-r)}{c}$$

   Comme $F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ nous avons $\boxed{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$

   (c) On reprend le raisonnement précédent sachant que f est de classe C^1. La primitive F est donc de classe $\mathcal{C}^2$, d'où f est également de classe $\mathcal{C}^2$.

   Le raisonnement par récurrence est immédiat : si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   Conclusion : $\forall\, n\in\mathbb{N}\quad f\in\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ soit $\boxed{f\in\mathcal{C}^\infty}$

   (d) En dérivant la formule établie au **6-b)** $c\,f(x)=F(x+r)-F(x-r)$,

   il vient $\boxed{c\,f'(x)=f(x+r)-f(x-r)}$

7. On dérive encore (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $c\,f''(x)=f'(x+r)-f'(x-r)$.

   On multiplie par c et on utilise deux fois le résultat précédent :

   $$c^2 f''(x)=\underbrace{f(x+2r)-f(x)}_{=c\,f'(x+r)}-\underbrace{f(x)-f(x-2r)}_{=c\,f'(x-r)}=f(x+2r)-2f(x)+f(x-2r)$$

   Mais $f\in\mathcal{E}$ montre que $f(x+2r)+f(x-2r)=2f(x)f(2r)$, ce qui donne finalement $c^2 f''(x)=2f(x)f(2r)-2f(x)=\underbrace{2\big(f(2r)-1\big)}_{=\text{constante}}f(x)$ soit,

   $\boxed{f''(x)=\lambda\,f(x)}$

B - Conclusion :

8. Les solutions de l'équation différentielle linéaire $(\Delta)\ y''=\mu\,y$ du second ordre à coefficients constants $y=\mu\,y$ sont bien connues. L'équation caractéristiques est $t^2-\mu=0$

   — si $\mu>0$ alors $t=\pm\sqrt{\mu}$ donc $y=A\,e^{\sqrt{\mu}\,x}+B\,e^{-\sqrt{\mu}\,x}$

— si $\mu = 0$ alors $t = 0$ racine double donc $y = A\,x + B$
— si $\mu < 0$ alors $t = \pm\, i\,\sqrt{-\mu}$ donc $y = A\,\cos\left(\sqrt{-\mu}\,x\right) + B\,\sin\left(\sqrt{-\mu}\,x\right)$

9. Si $f \in \mathcal{E}$ alors :
— f n'est pas la fonction nulle donc $f(0) = 1$ (voir **4-b**)
— f est solution de l'équation différentielle (Δ) : $y'' = \mu\, y$ (voir **7**)
(ceci est une condition nécessaire, a priori non suffisante).

$f(0) = 1$ et f paire imposent des conditions (nécessaires) sur A et B :
— si $\mu > 0$ il vient $A + B = 1$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $(A - B)\underbrace{\left(e^{\sqrt{\mu}\,x} - e^{-\sqrt{\mu}\,x}\right)}_{=2\,\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}\,x)} = 0.$

Comme le "sh" n'est pas identiquement nul, $A = B = \dfrac{1}{2}$ soit $y = \mathrm{ch}\left(\sqrt{\mu}\,x\right)$ qui répond à la question (voir **2** et **3**) : $\underline{f : x \mapsto \mathrm{ch}\,(\alpha\,x) \quad \alpha > 0}$
— si $\mu = 0$ il vient $A = 1$ et $B = 0$ soit $f(x) = 1$ qui convient (fonction continue, non identiquement nulle et qui vérifie $1 + 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$) $\underline{f :\ x \mapsto 1}$
Note : c'est la solution précédente avec $\alpha = 0$
— si $\mu < 0$ il vient $A = 1$ et $B = 0$, donc $f(x) = \cos\left(\sqrt{-\mu}\,x\right)$ qui convient (voir la question **1**) $\underline{f :\ x \mapsto \cos\,(\alpha\,x) \quad \alpha > 0}$

En remarquant que la fonction nulle (qui convient) est la solution précédente avec $\alpha = 0$ et que les fonctions cos et ch sont paires, on peut omettre les conditions sur α.

CONCLUSION $\boxed{\mathcal{E} = \left\{x \mapsto \cos(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{x \mapsto \mathrm{ch}(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$

10. $\mathcal{F}$ est composé des fonctions $f \in \mathcal{E}$, non identiquement nulles et qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Il est clair que $\boxed{\mathcal{E} = \left\{x \mapsto \cos(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$

PARTIE III

A - $f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f \in \mathcal{E},\ f \neq 0$ et f s'annule au moins une fois

11. Si $f \in \mathcal{F}$, alors $f \in E$. On peut utiliser la question **4** qui montre que $f(0) \neq 0$ (f serait la fonction nulle) CONCLUSION $\boxed{f \in \mathcal{F} \Rightarrow f(0) = 1}$

Comme de plus f est paire, s'annule au moins une fois, et que ce n'est pas en 0, on peut donc dire $\exists\, x \neq 0 \quad f(x) = f(-x) = 0$ CONCLUSION $\boxed{f \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\, x > 0 \quad f(x) = 0}$

12. $E = \left\{x > 0 \ \text{—}\ f(x) = 0\right\}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et minoré (par 0). E admet donc une borne inférieurs $\boxed{a = \inf E = \inf\left\{x > 0 \ \text{—}\ f(x) = 0\right\} \text{ existe}}$

13. E étant minoré par 0, il est déjà acquis que $a \geqslant 0$.

a est limite d'une suite d'éléments de E. En effet, $\forall\ n > 0,\ a + \dfrac{1}{n}$ n'est pas minorant de E, d'où $\exists\ x_n \in E \quad a \leqslant x_n < a + \dfrac{1}{n}$. Quand n tend vers l'infini, $x_n \to a$ (par pincement). $\boxed{a \text{ est limite d'une suite d'éléments de } E}$

La continuité de f montre que : $f(a) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(x_n\right)}_{=0} = 0$ donc $f(a) = 0$

Comme $f(0) = 1$, nous en séduisons $a \neq 0$ CONCLUSION $\boxed{a > 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0}$

Note : autre démonstration (par l'absurde)

si $f(a) \neq 0$, la continuité de f en a montre l'existence de $\nu > 0$ tel que f ne s'annule pas sur l'intervalle $]a - \nu, a + \nu[$. Or $a = \inf E$ donc tout voisinage de a rencontre E, ce qui signifie que f doit s'annuler sur cet intervalle, d'où la contradiction.

NOTE : $a = \inf E$ et $a \in E$ donc $\boxed{a = \min E \quad \text{plus petit élément de } E}$

14. Montrons que $\forall\ x \quad x \in [\,0\,,\,a\,[\Rightarrow f(x) > 0$ en procédant par l'absurde :
si $\exists\ u \in]\,0\,,\,a\,[,\quad f(u) \leqslant 0$ (u n'est pas nul car $f(0) = 1 > 0$) alors
— si $f(u) = 0$, comme $u > 0$ nous avons $u \in E$ donc $u \geqslant a$. Il y a contradiction.
— si $f(u) < 0$, comme $f(0) = 1 > 0$ et f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre $\exists\ v \in]0, u[\subset]0, a[,\quad f(v) = 0$ ce qui est impossible (raisonnement ci-dessus en remplaçant u par v).

Dans les deux cas il y a contradiction CONCLUSION $\boxed{\forall\ x, \quad x \in [0, a[\Rightarrow f(x) > 0}$

B - $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$ et $g(x) = \cos(\omega\,x)$

15. (a) La propriété de f avec $x = y = \frac{a}{2^{\,q+1}}$ donne $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + f(0) = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$.

Comme $f(0) = 1$, il vient $\boxed{f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2}$

(b) Comme $g \in \mathcal{E}$, elle vérifie la même relation que ci-dessus.

Montrons par récurrence sur q que $\forall\ q \in \mathbb{N} \quad f(\dfrac{a}{2^{q+1}}) = g(\dfrac{a}{2^{q+1}})$

— *Amorce* : par définition de g : $g(a) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

— *Hérédité* : si $g\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$, alors $1 + g\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = 1 + f\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$

soit $2\left(f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2 = 2\left(g\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$ Mais $\dfrac{a}{2^{q+1}} \in]0, a[$ où f et g sont positives donc $f\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^{q+1}}\right)$ que nous souhaitions.

Conclusion $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)}$

On admet que $\boxed{\forall\, p, q \in \mathbb{N}, \quad f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)}$

En fait, la démonstration est assez simple (par récurrence transfinie sur p) :

— $p = 0$: $f(0) = g(0) = 1$

— $p = 1$: $f\left(\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(\dfrac{a}{2^q}\right)$ est le résultat précédent

— *hérédité :* si $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant p \Rightarrow f\left(k\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(k\dfrac{a}{2^q}\right)$ alors,

la propriété des éléments de $\mathcal{E}$ avec $x = p\dfrac{a}{2^q}$ et $y = \dfrac{a}{2^q}$ donne

$$f\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right) + \underbrace{f\left((p-1)\frac{a}{2^q}\right)}_{=A} = 2\underbrace{f\left(p\frac{a}{2^q}\right)}_{=B}\underbrace{f\left(\frac{a}{2^q}\right)}_{=C} \quad \text{et}$$

$$g\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right) + \underbrace{g\left((p-1)\frac{a}{2^q}\right)}_{=A} = 2\underbrace{g\left(p\frac{a}{2^q}\right)}_{=B}\underbrace{g\left(\frac{a}{2^q}\right)}_{=C} \quad \text{d'où}$$

$$f\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right) = g\left((p+1)\frac{a}{2^q}\right)$$

16. Le résultat **15-b** montre que $\forall\, p, q \in \mathbb{N} \quad f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right) = g\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)$.

    La parité de f et g permet de passer aux entiers relatifs ($p \in \mathbb{Z}$).

    Ainsi : $\boxed{\forall\, p \in \mathbb{Z},\ \forall\, q \in \mathbb{N},\ f\big(p\,\tfrac{a}{2^q}\big) = g\big(p\,\tfrac{a}{2^q}\big)}$

17. Tout réel x est la limite d'une suite (x_n) d'éléments de la forme ci-dessus.

    Comme $f(x_n) = g(x_n)$ et que f et g sont continues, nous avons

    $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ Conclusion $\boxed{f = g}$

18. Nous venons de voir que : $\forall\ f \in \mathcal{F} \quad f(x) = \cos(\omega\, x)$ où $\omega = \dfrac{\pi}{2a}$ est un réel positif quelconque $\mathcal{F} \subset \left\{x \mapsto \cos(\omega\, x) \;—\; \omega \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

    Réciproquement : nous savons qu'une telle fonction g est élément de $\mathcal{E}$, avec $g \neq \mathbf{0}$, et que g s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{F} = \left\{x \mapsto \cos(\omega\, x) \;—\; \omega \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.

    Enfin, la parité de la fonction "cos" permet d'admettre les coefficients ω négatifs.

    Conclusion $\boxed{\mathcal{F} = \left\{x \mapsto \cos(\omega\, x) \;—\; \omega \in \mathbb{R}^*\right\}}$