Devoir Surveillé 05

Le mardi 6 Janvier 2026

8h-12h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence :

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 1; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n; \quad v_{n+1} = 2u_n$$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0, \quad A^n = u_nA + v_nI_3$.
4.
   (a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_n = 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.
   Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$

   Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Exercice 2
Soit $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
2. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.
   Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Exercice 3
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$, et par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $\left(1 + (z_B)^2\right)$.

1. (a) Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
   (b) Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$. Placer le point B.
2. (a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$ et $(z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}})$.
   (b) En déduire que les points A , B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

Exercice 4
Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E}\ : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
   On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que x et y sont de parités différentes.
   (b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
   (c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-Ã -dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   (a) Vérifier qu'alors le couple $(|u^2 - v^2|\ ;\ 2uv)$ est solution de l'équation **E**.
   (b) Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.
   (a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
   (b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

Exercice 5

— $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \;—\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y) \right\}$$

$\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments $f \in \mathcal{E}$ tels que :
— f n'est pas la fonction identiquement nulle
— f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$

PARTIE I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique.
   Démontrer la formule :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$$
   En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
3. Soit f dans $\mathcal{E}$; montrer que, pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha\, x)$ est dans $\mathcal{E}$.
4. On fixe un élément f de $\mathcal{E}$. En donnant à x (et/ou y) des valeurs particulières, prouver que :
   (a) $f(0)$ vaut 0 ou 1 .
   (b) Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
   (c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

PARTIE II

A - On fixe ici un élément f de $\mathcal{E}$ tel que $f(0) = 1$.

5. Montrer que pour chaque réel $r > 0$, on a :
   (a)
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^r f(x+y)\,dx = \int_y^{y+r} f(u)\,du$$
   (b)
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2\,f(x) \int_0^r f(y)\,dy = \int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^{x} f(v)\,dv$$
   (voir [1])
6. (a) Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\int_0^r f(y)\,dy$

   Dans la suite de cette partie **II-A** on fixe un réel $r > 0$ qui rend $c = 2\int_0^r f(y)\,dy$ strictement positive

   (b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (voir [2]).
   (c) Montrer alors que f est en fait autant de fois que l'on veut dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que la constante c vérifie $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad c\,f'(x) = f(x+r) - f(x-r)$

1. On commencera en intégrant par rapport à y la condition d'appartenance à $\mathcal{E}$.
2. On justifiera l'existence d'une primitive F de f et on exploitera le résultat **5-b)** pour exprimer $f(x)$.

7. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \lambda\, f(x)$.

B- Conclusion

8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $\quad y'' = \mu\, y \quad$ en séparant les cas $\mu > 0,\ \mu < 0 \quad$ et $\quad \mu = 0$.
9. En déduire que $\mathcal{E} = \big\{x \mapsto \cos(\alpha\, x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{x \mapsto \operatorname{ch}(\alpha\, x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\big\}$
10. Donner tous les éléments de $\mathcal{F}$.

PARTIE III

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ alors tout réel x est limite d'une suite d'éléments de la forme $a\,\dfrac{p}{2^q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \big\{x > 0 \;—\; f(x) = 0\big\}$.

A-

11. Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
12. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.
13. Justifier que a est limite d'une suite (x_n) d'éléments de E.
    En déduire que $f(a) = 0$ puis que $a > 0$.
14. Montrer que : $\quad \forall\, x \in [\,0\,,\,a\,[, \quad f(x) > 0$.

B- On pose $\omega = \dfrac{\pi}{2\,a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(\omega\, x)$.

15. (a) Soit $q \in \mathbb{N}$; montrer que :
$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right)^2$$
    (b) En déduire, en raisonnant par récurrence sur q, que :
$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$$
    On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement : si $q \in \mathbb{N}$ est fixé :
$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad f\left(p\frac{a}{2^q}\right) = g\left(p\frac{a}{2^q}\right)$$
16. Prouver que : $\forall\, p \in \mathbb{Z}\,,\ \forall\, q \in \mathbb{N}\,,\ f\big(p\,\frac{a}{2^q}\big) = g\big(p\,\frac{a}{2^q}\big)$.
17. En déduire que $f = g$.
18. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.