Devoir Surveillé 04

Le vendredi 8 Décembre 2023

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.

2.a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel, la relation

$$X_n = A^n X_0$$

3. Soit P, Q et T les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P.

b) Calculer les produits PT et AP. En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

a) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.

b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5.a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2
On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,] = \left\{x + y\sqrt{2}/(x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

-I- Structure de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau commutatif et intègre. On pourra montrer qu'il est sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble U des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ est un groupe multiplicatif.

On se propose de déterminer l'ensemble U.

-II- Un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$

Pour tout $z = x + y\sqrt{2}$, $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $\overline{z} = x - y\sqrt{2}$ et $N(z) = z\,\overline{z}$.

1. Montrer que $z \to \overline{z}$ est un "automorphisme involutif" de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,], +, \times)$ autrement dit une bijection qui vérifie
   — $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
   — $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
   — involutif : $\overline{\overline{z}} = z$
2. Montrer que $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$, $N(z_1 \times z_2) = N(z_1) \times N(z_2)$.
3. Monter que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ si et seulement si $N(z)$ l'est dans $\mathbb{Z}$.
   En déduire que $z \in U \Leftrightarrow \left|x^2 - 2y^2\right| = 1$.

-III- Forme des éléments de U

On note U_+ les éléments de U de la forme $z = x + y\sqrt{2}$ avec $x > 0$ et $y > 0$.

1. On pose $u = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que $u \in U_+$.
2. Soit $z \in U_+$. Montrer que, si $z \neq u$, alors $y < x < 2y$.
3. Montrer que, si $z \in U_+$ et $z \neq u$, alors $z_1 = \frac{z}{u}$ est élément de U_+ .
4. En déduire, par divisions successives, que tout $z \in U_+$ s'écrit $z = u^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer alors la forme de tous les éléments de U .

Exercice 3
Étude de la réciproque de la fonction th

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note arg th (argument tangente hyperbolique) sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que arg th est impaire.
4. Démontrer que arg th est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer arg th à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de arg th en 0.

Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $\quad (E) : xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

7. Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles
et dérivables en zéro, qui vérifient : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \dfrac{2\, f(x)}{1 + \big(f(x)\big)^2}$

8. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
9. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
10. Montrer que, si f est solution, on a : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$
(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$)
11. Montrer que, si f est solution, $-f$ est aussi solution.
12. Montrer que th est solution du problème posé.

Dans les questions **13** *à* **17** *on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$, et que f n'est pas constante.*

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$, et l'on définit la suite $\big(u_n\big)$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$$

13. Montrer que la suite $\big(u_n\big)$ est convergente et préciser sa limite.
14. Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
15. En utilisant les résultats des questions **13** et **14**, aboutir à une contradiction.

16. Que peut-on dire si l'hypothèse "$f(0) = 1$" est remplacée par l'hypothèse "$f(0) = -1$" ?
17. Conclusion ?

Dans les questions **18** *à* **22** *on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.*

18. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13** à **17**, montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1$.

On définit alors la fonction g par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{arg\,th}\big(f(x)\big)$

19. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$.
20. Montrer que g est dérivable en 0.
21. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on définit la suite $\big(v_n\big)$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que $\big(v_n\big)$ est convergente et calculer sa limite.
22. En déduire que g est linéaire.
23. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.