# Devoir Surveillé 04 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

**1.** On a $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$, donc $X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**2.a)** Les relations $\begin{cases} u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $X_{n+1} = AX_n$ ($\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$).

**b)** On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

La formule est vraie pour $n = 0$ : $X_0 = A^0 X_0$ ($A^0 = I$).

Soit $n$ un entier naturel pour lequel on a $X_n = A^n X_0$. Puisque $X_{n+1} = AX_n$, on a alors

$X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1}X_0$. La formule est donc encore vraie pour l'entier $n+1$.

On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

**3.** Soit $P$, $Q$ et $T$ les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**a)** On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$.

On en déduit que $P \times \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}PQ = I$, ce qui montre que $P$ est inversible, avec $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

**b)** On trouve $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, et

$AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On voit que $AP = PT$. En multipliant cette égalité, membre à membre à droite par $P^{-1}$, on obtient $A = PTP^{-1}$.

On montre alors, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

La formule est vraie pour $n = 0$ : $A^0 = I$ et $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

On a aussi montré qu'elle est vraie pour $n = 1$ : $A^1 = PT^1P^{-1}$.

On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, on a $A^n = PT^nP^{-1}$. On en déduit $A^{n+1} = A^nA = \left(PT^nP^{-1}\right)\left(PTP^{-1}\right) = PT^n\left(P^{-1}P\right)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$car $P^{-1}P = I$ , la formule est donc encore vraie pour l'entier $n+1$, ce qui achève de prouver qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

**4.** Soit $D$ la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

**a)** On voit que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où, pour tout entier $k \geq 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$ (matrice nulle).

**b)** On trouve $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$ $(= \frac{1}{2}N)$.

De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque $DN = ND$ ($D$ et $N$ *commutent*), la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$,

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Puisque, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$, la somme se réduit aux termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$.

Puisque $\binom{n}{0} D^n N^0 = D^n$, et $\binom{n}{1} D^{n-1} N = nD^{n-1}N$, on a $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

$D$ étant diagonale, on a $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vient :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left( \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, c'est-à-dire $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On voit (remplacer $n$ par 0, puis par 1) que la formule est aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

*Remarques*

**(i) L**a formule $D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se montre aussi très simplement par récurrence, à partir de l'égalité $DN = \frac{1}{2}N$.

**(ii)** Dans la mesure où la formule $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ était donnée par l'énoncé, elle se démontrait très simplement par récurrence (il suffisait de vérifier que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; cependant, l'énoncé attendait visiblement l'utilisation de la formule du binôme de Newton.

**c)** On trouve

$$\begin{aligned} PT^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4 \times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**5.a)** On obtient $u_n$ en calculant le vecteur-colonne $X_n$ par la formule $X_n = A^n X_0$ . Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $X_n$ en recopiant simplement la première colonne de $A^n$.

Ainsi, $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$, et, en particulier ($X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$)

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \times 2^n - 4n - 4).$$

**b)** De **a)** on déduit $u_n = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}$.

On a $\ln \frac{n}{2^n} = \ln n - \ln 2^n = \ln n - n \ln 2 = n \left( \frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right)$. On sait que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left( \frac{\ln n}{n} - \ln 2 \right) = -\ln 2 < 0$. Comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n = +\infty$, on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln \frac{n}{2^n} =$

$-\infty$. Comme $\dfrac{n}{2^n} = \exp\left(\ln \dfrac{n}{2^n}\right)$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n}{2^n} = \lim\limits_{t\longrightarrow-\infty} \exp(t) = 0$. Comme, de plus, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{4}{2^n} = 0$, on a finalement

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 4$$

**Exercice 2**
**-I-**

Attention : pour confirmer qu'un réel de la forme $a + b\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il faut
impérativement s'assurer que les coefficients sont entiers.

1. Aucune difficulté théorique, et rapide en le traitant comme un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Simple (en fait, ce résultat est valable pour tout anneau).

**-II-**

Simple et rapide.
Ne pas oublier de traiter la réciproque dans le **3.**

**-III-**

1. Immédiat avec ce qui précède.
2. Plus délicat. Utiliser **-II-3** dans les deux cas, sans oublier que $x$ et $y$ sont des entiers naturels non nuls donc $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 2, \dots$
3. On calculera $z_1 = \frac{z}{u} = \dots + \dots\sqrt{2}$.
4. Considérer la suite $(z_k)$. Si elle est infinie, en posant $z_k = x_k + y_k\sqrt{2}$, l'observation des $x_k$ fait apparaître une contradiction
5. La question précédente donne une inclusion : $U_+ \subset \left\{u^n \;—\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
   La transformer en égalité, puis passer à $U$.

**Exercice 3**
**Étude de la réciproque de la fonction** th

1. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions sh et ch sont dérivables et ch ne s'annulent pas d'où th est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc également continue).

   Pour tout réel $x$, $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   De plus, pour tout $x$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$
   et par imparité $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$.
   Le théorème des fonctions continues strictement monotones permet de conclure :
   Conclusion $\boxed{\operatorname{th} : \mathbb{R} \to ]-1,1[ \text{ est une bijection}}$
2. Le calcul précédent montre que : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)}$
3. th étant impaire bijective, il en est de même pour sa réciproque $\boxed{\operatorname{arg\,th} \text{ est impaire}}$
4. $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{th} : \mathbb{R} \to I \text{ est bijective} \\ \operatorname{th} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \operatorname{th}' \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$ sa fonction réciproque est dérivable sur $I$. De plus :

   $$\operatorname{arg\,th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'\left(\operatorname{arg\,th} x\right)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2\left(\operatorname{arg\,th} x\right)} \Rightarrow \boxed{\forall x \in I \ \operatorname{arg\,th}'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$
5. Nous avons : $\left.\begin{array}{c} y = \operatorname{arg\,th}(x) \\ x \in I \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \operatorname{th}(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

   Ceci donne immédiatement $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$ soit $\boxed{\forall\, x \in I, \quad \operatorname{arg\,th}\, x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}}$

**Étude d'une équation différentielle**

6. $(E)$ $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, avec second membre. Sur $]0,1[$, $x$ est non nul et positif.

   — *solution générale de l'ESSMA* : $x \mapsto K e^{\int -\frac{3}{x}\,dx} = K\, e^{-3\ln|x|} = K\, x^{-3}$
   — *solution particulière de l'équation complète* par variation de la constante, sous la forme $y = \psi\, y_0$ où $y_0 : x \mapsto x^{-3}$ est solution de l'ESSMA :

   $$\begin{array}{rl|l} y & = \varphi\, y_0 & 3 \\ y' & = \varphi\, y_0' + \varphi'\, y_0 & x \\ \hline \frac{1}{1-x^2} & = x\,\varphi'\, y_0 & \end{array} \quad \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)\,x^{-3}} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

qui s'intègre en $\int \dfrac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx = -x + \operatorname{arg\,th} x$

d'où la solution particulière : $\varphi\, y_0 : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\operatorname{arg\,th} x}{x^3}.$

L'équation (E) étant linéaire, les solutions s'obtiennent en ajoutant :

$$\boxed{\text{solutions de (E) : } \quad x \mapsto \frac{K - x + \operatorname{arg\,th} x}{x^3} \qquad K \in \mathbb{R}}$$

**Étude d'une équation fonctionnelle**

$f$ est dérivable en 0 avec $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ (1)

7. Si La fonction constante $x \mapsto \lambda$ vérifie (1), nous avons $\lambda = \dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}$

   qui équivaut à $\lambda(\lambda^2-1)=0$ soit $\boxed{\lambda \in \{-1,0,1\}}$

8. Si $f$ vérifie (1), $f(0)$ vérifie $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}$ ce qui, comme dans la question précédente donne $\boxed{f(0) \in \{-1,0,1\}}$

9. Si $f$ vérifie (1) nous avons : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f\left(2\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2\, f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+f^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{2t}{1+t^2}.$

   Montrons que $-1 \leqslant \dfrac{2t}{1+t^2} \leqslant 1$ : comme $(1+t^2)>0$, ceci est équivalent à $-1-t^2 \leqslant 2t \leqslant 1+t^2 \Leftrightarrow \left(0 \leqslant 1+2t+t^2 \text{ et } 0 \leqslant 1-2t+t^2\right)$ soit $0 \leqslant (1+t)^2$ et $0 \leqslant (1-t)^2$ qui est vrai dans $\mathbb{R}$. $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1}$

   *Note :* il est également possible d'étudier les variations de $\varphi : t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$

   $\varphi'(t) = \frac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$ et le tableau

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(t)$ | | $-$ | $-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

10. Soit $g=-f$ où $f$ vérifie (1). Alors $g$ vérifie (1) puisque, :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(2x) = -f(2x) = \frac{-2f(x)}{1+f^2(x)} = \frac{-2f(x)}{1+\{-f(x)\}^2} = \frac{2g(x)}{1+g^2(x)}.$$

   D'autre part, comme $f$, $-f$ est continue en 0. $\boxed{f\text{solution} \Rightarrow -f \text{ est solution}}$

11. Pour calculer $\operatorname{th}(2x)$ on peut utiliser les formules connues de trigonométrie hyperbolique. On peut également retrouver le résultat : $\forall\, x \in \mathbb{R}$ :

   $$\frac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x} = \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \frac{2\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left\{e^x+e^{-x}\right\}^2+\left\{e^x+e^{-x}\right\}^2} = \frac{2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}{2\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)} = \text{th}$$

   D'autre part,th est continue en 0 donc $\boxed{\text{th est solution du problème posé}}$

*de* **13** *à* **17**, $f$ *est est une solution non constante avec* $f(0)=1$

$f(x_0) \neq f(0)$ et $u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$

12. On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$ et $f$ continue en 0 (car dérivable) donc $\lim_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = 1.$

   Il en résulte que $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 1}$

13. La relation (1) nous donne une relation liant $u_n$ et $u_{n+1}$ : $\forall\, n \in \mathbb{N}$

   $$u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2\, f\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1+f^2\left(2\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right)} \qquad \text{d'où}$$

   $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}}$$

   Comme pour tout $n$, $1+u_{n+1}^2 > 0$, $u_{n+1}$ et $u_n$ ont toujours le même signe donc, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n \text{ a le signe de } u_0}$

   D'autre part, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - \dfrac{2\,u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = u_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^2-1}{1+u_{n+1}^2}.$

   Comme le numérateur est négatif puisque $u_{n+1}$ est une image par $f$ donc $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, nous en déduisons que $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $-u_{n+1}$ donc du signe de $-u_0$.

   Conclusion $\boxed{\begin{cases} u_0 > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est positive décroissante} \\ u_0 < 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est négative croissante}\end{cases}}$

14. Distinguons les deux cas :

— si $u_0 > 0$ : nous avons $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad -1 \leqslant u_n \leqslant u_0 \leqslant 1$ avec $u_0 = f(x_0) \neq f(0) = 1$. En passant à la limite, il vient $\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant u_0 < 1$ qui contredit $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ du **13**.

— si $u_0 < 0$ : alors tous les termes de la suite $u$ sont négatifs et la suite ne peut pas converger vers 1.

15. Si $f(0) = -1$, alors $g = -f$ est une solution du problème et vérifie $g(0) = 1$.La question précédente appliquée à $g$ donne la même contradiction

16. *Conclusion* : si $f$ non constante est est solution de (1), nous avons $f(0) \neq 1$ et $f(0) \neq -1$. Comme $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$ (voir **9**) on peut dire $\boxed{f(0) = 0}$

17. Supposons qu'il existe un réel $x_0$ tel que $f(x_0) = 1$, et considérons la suite $v$ définie par $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad v_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.

— On démontre, comme à la question **13** que $v$ converge vers $f(0) = 0$.

— La suite est constante car $v_0 = 1$ et,

si $u_n = 1$, alors $1 = u_n = \dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + 1 = 0 \Rightarrow u_{n+1} = 1$

— La suite ne peut donc pas converger vers 0.

De manière analogue, en utilisant $g = -f$, il est impossible qu'il existe un réel $x_0$ tel que $f(x_0) = -1$. Comme $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ il vient $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad -1 < f(x) < 1}$

La fonction $\operatorname{arg\,th}$ est définie sur $]-1,1[$. *On peut poser* $g(x) = \operatorname{arg\,th}\big(f(x)\big)$

18. Posons $y = \operatorname{arg\,th}\big(f(x)\big)$ [donc th(y)=f(x)], et calculons $g(2x) = \operatorname{arg\,th}\big(f(2x)\big)$.

$f$ vérifie la propriété donc $g(2x) = \operatorname{arg\,th} \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)} = \operatorname{arg\,th} \dfrac{2\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th}^2 y}$

et en utilisant la question **12** : $g(2x) = \operatorname{arg\,th}\big(\operatorname{th}(2y)\big) = 2y$ d'où $\boxed{g(2x) = 2g(x)}$

19. $\left.\begin{array}{l}\text{La fonction f est dérivable en 0 et } f(0)=0\\ \text{La fonction } \operatorname{arg\,th} \text{ est dérivable en 0}\end{array}\right\} \Rightarrow$ la composée est dérivable en 0

Conclusion $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$

*Note* : $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ où $\operatorname{arg\,th}$ est dérivable.

20. $x \in \mathbb{R}^*$ et $v_n = \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}} = \dfrac{g(t_n)}{t_n}$ où $t_n = \dfrac{x}{2^n} \to 0$. Comme $g$ est dérivable en 0 et $g(0) = \operatorname{arg\,th}\big(f(0)\big) = \operatorname{arg\,th}(0) = 0$, nous avons $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g(t_n) - g(0)}{t_n - 0} = g'(0)$.

D'autre-part, $g'(0) = \underbrace{\operatorname{arg\,th}'\big(f(0)\big)}_{=\frac{1}{1-0^2}=1} f'(0) = f'(0)$ soit $\boxed{\lim_{n\to\infty} v_n = g'(0) = f'(0)}$

21. Comme $g(2x) = 2g(x)$, nous avons : $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = \frac{g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}} = \frac{g\left(2\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\dfrac{x}{2^{n+1}}} = \frac{2g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\dfrac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}$$

La suite $(v_n)$ est constante, donc $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } v_0 = \dfrac{g(x)}{x}}$

Mais, d'après la question **19**, la suite $v$ converge vers $g'(0)$. L'unicité de la limite montre que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad g'(0) = \dfrac{g(x)}{x}$ d'où $g(x) = g'(0)x = \alpha\, x$

Comme $g(0) = 0$, ceci reste valable pour $x = 0$ $\boxed{g \text{ est linéaire : } g(x) = \alpha\, x}$

22. Si $f$ est solution du problème posé :
   - Si $f(0) = 1$ d'après la question **17.**, $f$ est constante égale à 1.
   - Si $f(0) = -1$ d'après la question **17.**, $f$ est constante égale à **-1**.
   - Si $f(0) = 0$ d'après la question **22.**, il existe un réel $\alpha$ tel que pour tout réel $x$, $\operatorname{arg\,th}(f(x)) = \alpha x$ ce qui donne $f(x) = \operatorname{th}(\alpha x)$. La question **12.** assure que les fonctions de ce type sont bien solutions.

Conclusion $\boxed{\text{Les solutions sont } x \mapsto 1,\quad x \mapsto -1 \quad \text{et} \quad x \mapsto \operatorname{th}\alpha\, x,\ \alpha \in \mathbb{R}}$