Devoir Surveillé 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

φ continue positive (sauf en un nombre fini de points), $\lim_\infty \varphi = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(E_x) : $\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$ a pour solution $y = f(x)$.

Partie I

$\varphi(x) = e^x$ vérifie les conditions avec $\ell = +\infty$.

1. L'équation (E_x) devient $\int_x^y e^t\,dt = 1 \Leftrightarrow \left[e^t\right]_x^y = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x$.
   Comme $1 + e^x > 0$, (E_x) admet une solution unique y où $\boxed{y = f(x) = \ln(1+e^x)}$

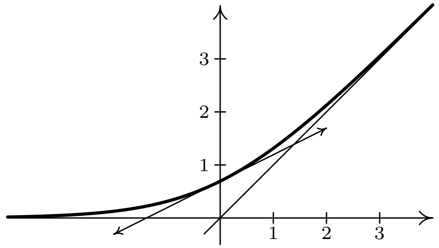
2. f est définie, continue dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f\,'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$.
   Les limites aux bornes sont immédiates.
   On obtient le tableau des variations ci-dessous

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Étudions rapidement la différence $y - x$:
   $$f(x) - x = \ln(1+e^x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$
   qui montre que $\lim_{x\to+\infty}(y-x) = 0$ et $f('x) - x > 0$.
   $\boxed{\text{La droite d'équation } y = x \text{ est asymptote, la courbe est au dessus}}$

4. Au voisinage de 0, nous avons :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1 + e^x = 2\left(1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{=u\to 0}\right)$$
   d'où $f(x) = \ln(2) + \ln(1+u) = \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$
   ce qui donne $\boxed{f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$
   d'où la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ et la position locale
   $\boxed{\text{tangente d'équation } y = \ln(2) + \frac{x}{2}\text{ , } \mathcal{C} \text{ localement au dessus}}$

5. Ci-dessous, la représentation où figurent les différents résultats obtenus



Partie II

$\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t)\,dt$

6. Dans cette question, $\varphi(t) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$.
   (a) Pour tous réels x et y, nous avons
   $$\int_x^y \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x\right)$$
   Comme $\operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan} x > -\frac{\pi}{2}$, nous avons $\boxed{\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1}$

   (b) Ainsi, $\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$ est impossible : $\boxed{\text{l'équation } (E_x) \text{ n'a pas de solution}}$

   (c) La limite en $+\infty$ de $\frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$ est immédiate : $\boxed{\ell = 0}$

   Désormais : $\ell \neq 0$.

7. Il est immédiat que l'équation (E_x) s'écrit $\boxed{(E_x) : \quad \Phi_x(y) = 1}$

8. (a) φ étant continue, Φ_x est la primitive de φ qui s'annule en x. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Sa dérivée est φ qui est positive (ou nulle en un nombre fini de points) donc Φ_x est strictement croissante. $\boxed{\Phi_x \text{ est continue strictement croissante}}$

   Nous pouvons en déduire que $\boxed{\text{l'équation } (E_x) \text{ admet au plus une solution.}}$

   (b) φ étant strictement positive, $\ell = \lim_{+\infty}\varphi$ vérifie soit $\ell = +\infty$, soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   • <u>Cas $\ell = +\infty$</u> Considérons un réel $A > 0$. $\lim_{+\infty}\varphi = +\infty$ montre
   $$\exists\, t_0 \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ t \geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geqslant A$$
   • <u>Cas $\ell \in \mathbb{R}_+$</u> donc $\ell > 0$ (puisque $\ell \neq 0$). Avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, $\lim_{+\infty}\varphi = l$ montre

$$\exists\, t_0\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\in\mathbb{R}\,,\ t\geqslant t_0\ \Rightarrow\ \ell-\frac{\ell}{2}pp\varphi(t)\leqslant \ell+\frac{\ell}{2}\ \Rightarrow\ \underbrace{A=\frac{\ell}{2}}_{A>0}\leqslant\varphi(t)$$

Dans les deux cas : $\boxed{\exists\, A>0\,,\ \exists\, t_0\in\mathbb{R}\,,\ t\geqslant t_0\ \Rightarrow\ \varphi(t)\geqslant A}$

(c) Avec les notations précédentes, pour $u>t_0$ nous avons

$$\Phi_x(u)=\underbrace{\int_x^{t_0}\varphi(t)\,dt}_{=K\text{ constante}}+\int_{t_0}^{u}\varphi(t)\,dt\geqslant K+(u-t_0)\,A$$

Ceci prouve que $\lim_{+\infty}\Phi_x=+\infty$ donc $\boxed{\exists\, u\in\mathbb{R}\,,\ \Phi_x(u)>1}$

(d) Φ_x est continue sur $[x,u]$ vérifie $\underbrace{\Phi_x(x)}_{=0}<1<\Phi_x(u)$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un réel t vérifiant $\Phi_x(t)=1$. L'équation (E_x) admet une solution, unique d'après **8-a-**.
$\boxed{(E_x)\ \text{admet une solution unique}}$

Partie III

9. Rappelons que φ est continue, donc $\Phi_0:y\mapsto\int_0^y\varphi$ est une primitive de φ.
   $f(x)$ est la solution de (E_x) se traduit par $f(x)>0$ et

$$\int_x^{f(x)}\varphi(t)\,dt=1\Leftrightarrow\big[\Phi_0\big]_x^{f(x)}=1\Leftrightarrow\Phi_0\big(f(x)\big)=\Phi_0(x)+1$$

   Continue strictement croissante, Φ_0 induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\underbrace{]\lim_{-\infty}\varphi,\lim_{+\infty}\Phi_0[}_{=]\alpha,+\infty[}$.
   En notant Φ_0^{-1} l'application réciproque, l'égalité précédente est équivalente à $\boxed{f(x)=\Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)}$

   Note : on pouvait aussi composer l'égalité par Φ_0^{-1}
   en s'assurant que $\Phi_0(x)\in]\alpha,+\infty[\Rightarrow\Phi_0(x)+1\in]\alpha,+\infty[$.

10. La fonction Φ_0 étant continue strictement croissante, il en est de même pour $x\mapsto\Phi_0(x)+1$ et sa réciproque $(\Phi_0)^{-1}$.
    Composée de deux telles fonctions $\boxed{f\ \text{est continue strictement croissante}}$

11. (a) La bijection continue Φ_0 est dérivable, et sa dérivée φ ne s'annule pas (hypothèse de cette question **-a-**). L'application réciproque est donc dérivable et vérifie $\big(\Phi_0^{-1}\big)'=\frac{1}{\varphi\circ\Phi_0^{-1}}$. Ainsi, composée de fonctions dérivables, f est dérivable avec
$$f'(x)=\big(\Phi_0^{-1}\big)'\big(\Phi_0(x)+1\big)\cdot\Phi_0{}'(x)=\frac{\Phi_0{}'(x)}{\varphi\Big(\Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)\Big)}:\quad\boxed{f'(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}}$$

    (b) Dans cette question, $\varphi(x_0)\neq0$ strictement positive sur $V\in\mathcal{V}\big(f(x_0)\big)$ sauf en $f(x_0)$ où $\varphi\big(f(x_0)\big)=0$.
    ▶ Le raisonnement du **-a-** s'applique en tout point x tel que $\varphi\big(f(x)\big)\neq0$, donc f est dérivable sur $V-\{x_0\}$, avec $f'(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.
    ▶ f et φ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc
$$\lim_{x_0}\varphi=\varphi(x_0)\neq0\quad\text{et}\quad\lim_{x_0}\varphi\circ f=\varphi\circ f(x_0)=0$$
    ce qui montre que $\lim_{x_0}f'=\pm\infty$
    ▶ En résumé :
$$\left.\begin{array}{l}f\text{ continue sur }V\\ f\text{ dérivable sur }V-\{x_0\}\\ f'\text{ a une limite infinie en }x_0\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}f\text{ non dérivable en }x_0\\ \text{tangente verticale en }x_0\text{ pour }\mathcal{C}\end{array}\right.}$$

12. Dans cette question $\ell=+\infty$ et ε est un réel strictement positif.
    (a) Puisque $\lim_{+\infty}\varphi=+\infty$, nous avons $\boxed{\exists\, a\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\,,\ t\geqslant a\ \Rightarrow\ \varphi(t)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}}$
    (b) Pour $x\geqslant a$ nous avons :
    ▶ $\varphi\geqslant0$ et $\int_x^{f(x)}\varphi=1>0$ entraînent $x<f(x)$
    ▶ Sur $[x,f(x)]\subset[a,+\infty[$, $\varphi(t)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$ donc
    $1=\int_x^{f(x)}\varphi(t)\,dt\geqslant\int_x^{f(x)}\frac{1}{\varepsilon}\,dt=\frac{f(x)-x}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ f(x)-x\leqslant\varepsilon$ Comme $f(x)-x\geqslant0$, nous avons finalement $\boxed{x\geqslant a\ \Rightarrow\ \big|f(x)-x\big|\leqslant\varepsilon}$

    Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=0$
    donc que $\boxed{\text{la droite d'équation } y=x \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty}$

13. Dans cette question $\ell\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\varepsilon>0$:
    ▶ Comme $\lim_{+\infty}\varphi=\ell$, nous avons $\exists\, a\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\,,\ a\leqslant t\ \Rightarrow\ \ell-\varepsilon\leqslant\varphi(t)\leqslant\ell+\varepsilon$
    ▶ Pour la même raison qu'au **12-b-** : $x<f(x)$

► Ainsi, pour $x \geqslant a$: $\int_x^{f(x)} (\ell-\varepsilon)\,dt \leqslant \int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^{f(x)} (\ell+\varepsilon)\,dt$
soit $(\ell-\varepsilon)\big(f(x)-x\big) \leqslant 1 \leqslant (\ell-\varepsilon)\big(f(x)-x\big)$ d'où (puisque $f(x)-x>0$)
$\ell-\varepsilon \leqslant \frac{1}{f(x)-x} \leqslant \ell+\varepsilon$ c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x} = \ell$

Finalement : $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = \frac{1}{\ell}$ $\boxed{\text{La droite d'équation } y = x + \frac{1}{\ell} \text{ est asymptote}}$

14. Dans cette question φ est paire, Γ est le graphe de f.
    (a) Le changement de variable $u=-t$ (de classe $\mathcal{C}^1$) montre que

$$\int_x^y \varphi(t)\,dt = \int_{-x}^{-y} \underbrace{\varphi(-t)}_{=\varphi(t)}\,(-dt) = \int_{-y}^{-x} \varphi(t)\,dt$$

Ainsi : $\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(t)\,dt = 1$ donc $\boxed{(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow (-y,-x)\in\Gamma}$

    (b) Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ admet la droite d'équation } y=-x \text{ pour axe de symétrie}}$

Partie IV

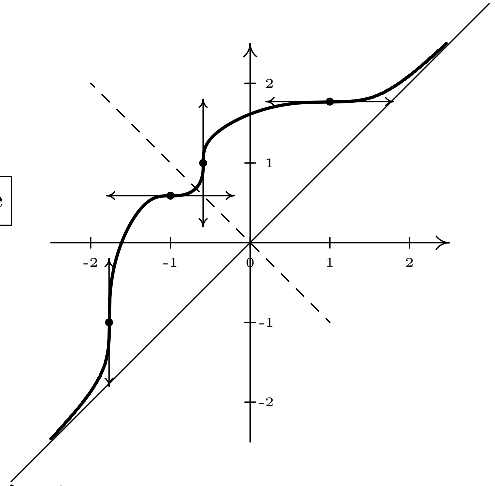
Dans cette partie $\varphi(x) = x^4 - 2\,x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

15. Il est clair que la fonction φ est continue (polynôme), strictement positive sauf en deux points ($x=\pm1$), paire, et que $\lim_{+\infty}\varphi = +\infty$.

16. Nous savons donc que :
    - ► f est strictement croissante,
    - ► Γ admet la droite d'équation $y=x$ pour asymptote,
    - ► et la droite d'équation $y=-x$ comme axe de symétrie.

    D'autre part, on a une tangente horizontale en x_0 si $\varphi(x_0)=0$ et $\varphi(f(x_0)\neq 0$,
    - ► donc ici pour $x=-1$, puisque
      - ⋆ $\varphi(1)=0$
      - ⋆ $\varphi\big(f(1)\big)\neq 0$ puisque $f(1)\neq -1$ (on vérifie facilement que $\int_1^{-1}\varphi \neq \pm1$)
        $f(1)\neq 1$ (puisque $\int_1^1 \varphi = 0 \neq 1$)
    - ► Même raisonnement en $x=-1$ On obtient les tangentes verticales par symétrie.

    D'où la représentation donnée ci-contre



Exercice 2

On considère l'équation différentielle définie sur $]0;+\infty[$ par : (E) $\qquad xy'-y = \dfrac{x^2}{1-\operatorname{ch}x}$

1. (a) $\forall x\in\mathbb{R}, 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{2} - 1 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$

   $\forall x\in\mathbb{R}, 2\operatorname{sh}^2 x + 1 = 2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{2} + 1 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)$

   On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}, \operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \Rightarrow \operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch}(2x)}{2}$ et $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{sh}^2 x + 1 \Rightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}$

   Conclusion : pour tout réel x on a :

$$\boxed{\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1 \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch}(2x)}{2} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}}$$

   (b) $\forall x>0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{2}}}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}}}$ car $x>0 \Rightarrow \operatorname{sh}\frac{x}{2}>0$

   alors $\forall x>0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}} = \sqrt{\dfrac{(\operatorname{ch}x-1)^2}{\operatorname{ch}^2 x-1}} = \dfrac{|\operatorname{ch}x-1|}{|\operatorname{sh}x|} = \dfrac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x}$ car $\operatorname{sh}x>0$ et $\operatorname{ch}x>1$

   Conclusion : $\boxed{\forall x>0, \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x}}$

2. (a) Soit x un réel strictement positif. La fonction : $u\mapsto \tanh\frac{u}{2}$ est de classe C^1 sur $[1,x]$ et réalise une bijection de $[1,x]$ sur $[\tanh\frac{1}{2};\tanh\frac{x}{2}]$

   $t=\tanh\frac{u}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1-\tanh^2\frac{u}{2}\right)du \Rightarrow du = \frac{2dt}{1-t^2}$ par ailleurs $\operatorname{ch}u - 1 =$

$2\operatorname{ch}^2\frac{u}{2}-2=2\left(\frac{1}{1-\tanh^2\frac{u}{2}}-1\right)=\frac{2t^3}{1-t^2}$

Ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\operatorname{ch}u-1}du=\int_{\tanh\frac{1}{2}}^{\tanh\frac{x}{2}}\frac{1}{\frac{2t^2}{1-t^2}}\frac{2dt}{1-t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{\tanh\frac{1}{2}}^{\tanh\frac{x}{2}}=\frac{1}{\tanh\frac{1}{2}}-\frac{1}{\tanh\frac{x}{2}}$

Conclusion : $\boxed{\forall x>0,\displaystyle\int_1^x\frac{1}{\operatorname{ch}u-1}du=\frac{1}{\tanh\frac{1}{2}}-\frac{1}{\tanh\frac{x}{2}}}$

(b) g est continue sur $]0;+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]0;+\infty[$. D'après la question précédente, une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction

$g:x\mapsto\dfrac{-1}{\operatorname{ch}x-1}$ est la fonction G définie par :

$\boxed{\forall x\in]0;+\infty[,G(x)=\frac{1}{\tanh\frac{x}{2}}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}}$

3. • Equation homogène : $xy'-y=0\Leftrightarrow y'-\frac{1}{x}y=0$: on pose $a(x)=-\frac{1}{x}$. a est une fonction continue sur $]0;+\infty[$. Une primitive de a sur $]0;+\infty[$ est la fonction A définie par $A(x)=-\ln|x|=-\ln x$ car $x>0$

$\forall x>0,e^{-A(x)}=e^{\ln x}=x$

Donc $\mathcal{S}_{EH}=\{f_k:x\mapsto kx,k\in\mathbb{R}\}$

• Recherche d'un solution particulière avec la méthode de la varaition de la constante :

on pose $y_P(x)=k(x)x$ où k est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.

Alors $y_P'(x)=k'(x)x+k(x)$. On reporte dans (E) :

$x(k'(x)x+k(x)-k(x)x=\frac{x^2}{1-\operatorname{ch}x}\Leftrightarrow k'(x)=\frac{1}{1-\operatorname{ch}x}=g(x)\Rightarrow k(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}$ d'après la question précédente.

Alors une solution particulière est : $y_P(x)=\frac{x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}$

• Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E\{f_k:x\mapsto kx+\frac{x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1},k\in\mathbb{R}\}}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}$

(a) $\operatorname{sh}x\underset{0}{\sim}x$ et $\operatorname{ch}x-1\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{2}$ alors $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$ alors $\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=2}$: <u>f est prolongeable par continuité en 0</u>.

(b) $\forall x\in\mathbb{R}^*,-x\in\mathbb{R}^*$ et $f(-x)=\dfrac{-x\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)-1}=\dfrac{x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}=f(x)$ donc <u>f est paire</u>.

(c) $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{xe^x}{e^x}=x$ alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

Remarque : $\frac{f(x)}{x}\underset{+\infty}{\sim}1$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

et $f(x)-x=\frac{x\operatorname{sh}x-x\operatorname{ch}x+x}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{x(1-e^{-x})}{\operatorname{ch}x-1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{e^x}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=0$

ainsi la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$

(d) f est dérivable sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$ en tant que quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur ne s'annulant pas sur chacun des intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

pour tout $x\neq0,f'(x)=\dfrac{(\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x)(\operatorname{ch}x-1)-x\operatorname{sh}^2x}{(\operatorname{ch}x-1)^2}=$

$\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}^2x-x\operatorname{ch}x-x\operatorname{sh}^2x}{(\operatorname{ch}x-1)^2}=\dfrac{\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}x-1)+x(\operatorname{ch}^x-\operatorname{sh}^2x)-x\operatorname{ch}x}{(\operatorname{ch}x-1)^2}$

$\dfrac{\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}x-1)+x(1-\operatorname{ch}x)}{(\operatorname{ch}x-1)^2}=\dfrac{(\operatorname{ch}x-1)(\operatorname{sh}x-x)}{(\operatorname{ch}x-1)^2}=\dfrac{\operatorname{sh}x-x}{\operatorname{ch}x-1}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout }x\neq0,f'(x)=\dfrac{\operatorname{sh}x-x}{\operatorname{ch}x-1}}$

(e) Sit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\operatorname{sh}x-x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},h'(x)=\operatorname{ch}x-1>0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $h(0)=0$ donc on un déduit le signe de $h(x)$:

$\forall x>0,h(x)>0$ et $\forall x<0,h(x)<0$

Par ailleurs $\forall x\in\mathbb{R}^*,\operatorname{ch}x-1>0$ donc f' est du signe de h.

Ainsi f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$