# Devoir Surveillé 03

Le vendredi 10 Novembre 2023

14h-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

**L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

**Exercice 1**

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et $-2$. A tout point $M$ d'affixe $z$, $z$ différent de 2, on associe le point $N$ d'affixe $\overline{z}$ et $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. Calculer $z'$ et $|z'|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + \mathrm{i}$.
2. (a) Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z}-2|$.
   (b) Montrer que, pour tout $z$ distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de $M'$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ d'affixe $z$ $(z \neq 2)$ tels que $M' = \mathrm{B}$.
4. On note $Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}M'}$.

   Montrer que, pour tout point $M$ distinct de A et n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point $M$ distinct de A, n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point $M'$. On illustrera par une figure.

**Exercice 2**
**Première partie**

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante définie sur l'intervalle $I = ]0; \frac{1}{2}[$

$$xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de $(E)$ à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire les solutions de $(E)$ sur $I$.
4. Déterminer la solution $g$ vérifiant $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3}$

**Deuxième partie**

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$$

5. Justifier que $f$ est définie sur $D = [-\frac{1}{2}; 0[\cup]0 : \frac{1}{2}]$.
6. Etudier la parité de $f$.
7. En utilisant la notion de taux d'accroissement, déterminer la limite de $f$ quand $x$ tend vers 0.
8. Indiquer pour quelles valeurs de $x$ ,$f$ est continue, puis dérivable et calculer pour ces valeurs la dérivée $f'$ de $f$.
9. Justifier que $f'$ est du signe de la fonction $h$ définie par $h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)$
10. Etudier les variations de $h$ sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$. En déduire le signe de $h$.
11. Dresser le tableau de $f$.
12. Démontrer que $f$ réalise une bijection de $]0; \frac{1}{2}[$ sur un intervalle $J$ qu'on précisera. En déduire qu'elle admet une fonction réciproque notée $f^{-1}$.
13. Résoudre l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$

**Exercice 3**
## Fonction indicatrice

Soit $E$ un ensemble non vide.
Pour une partie $A$ de $E$ on appelle fonction indicatrice de l'ensemble $A$ l'application

$$\chi_A : E \to \{0; 1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Soit $A \in P(E)$.
   (a) Déterminer $\chi_A^{-1}(\{0\})$ et $\chi_A^{-1}(\{1\})$
   (b) Déterminer $\chi_{\overline{A}}$ en fonction de $\chi_A$.
2. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.
   (a) Démontrer que $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E, \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$
   (b) En déduire que $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
   (c) Déterminer $\chi_{A\cap B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$.

(d) Déterminer $\chi_{A\cup B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$.

3. On note $\mathcal{F}(E,\{0;1\})$ l'ensemble des applications de $E$ dans $\{0;1\}$.
   (a) Démontrer que l'application $\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{F}(E,\{0;1\}) \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$ est injective.
   (b) Montrer que $f$ est surjective.

**Exercice 4**
## Équation différentielle avec trigo , fonctions, sommes

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel $x$ lorsque c'est possible $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\tan x}$.

### A. Généralités sur $f$.

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.
2. $f$ est-elle paire ? $f$ est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
3. $f$ est-elle $2\pi$-périodique ?
4. Montrer qu'il suffit d'étudier $f$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$ pour tracer sa courbe sur $D$ tout entier. On justifiera sa réponse.

### B. Étude de la fonction $f$ sur $D' = ]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$.

5. En utilisant deux taux d'accroissement, déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers 0.
6. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.
7. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $\pi$.
8. Étudier la dérivabilité de $f$ sur $D'$. Déterminer l'expression de sa dérivée.
   Montrer que pour tout $x$ appartenant à $D'$ on a $f'(x) = \dfrac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x}$
9. Étudier le signe de la dérivée de $f$ sur $D'$.
10. Déterminer le tableau de variations sur $D'$ et tracer l'allure de la courbe de $f$ sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

### C. Utilisation d'une primitive de $f$.

11. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - 1}{\tan x}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \cos x$.
12. En déduire l'aire, en unités d'aires de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$

### D. Une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle $(E)$ :

$$y'(x) + \frac{2}{\sin(2x)}y(x) = -\cos x$$

13. (a) Soit $X \in ]0;\frac{\pi}{2}[$. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{X} \frac{2}{\sin(2x)}dx$ en effectuant le changement de variable $t = \tan x$.
   On rappelle la formule de trigonométrie : $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

(b) Résoudre sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ l'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$.

14. Vérifier que $f$ est solution particulière de $(E)$
15. En déduire les solutions de $(E)$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

## E. Des suites

Pour $x$ dans $\mathbb{R}$ et pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

Pour $x \in ]0, \pi]$ et pour $n$ dans $\mathbb{N}$, on pose : $g_n(x) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

16. Donner un équivalent de $g_n$ au voisinage de 0. En déduire la limite de $g_n$ quand $x$ tend vers 0.

    On dit que la fonction $g_n$ est prolongeable par continuité en 0 et on note encore $g_n$ le prolongement obtenu sur $[0; \pi]$

17. Etablir la formule : $\forall x \in ]0, \pi], \quad f_n(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} g_n(x)$

    On pourra pour cela, s'intéresser à la quantité $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) f_n(x)$.

18. Pour $n$ dans $\mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} g_n(x)dx$.

    Montrer que la suite $(u_n)$ est constante et préciser sa valeur.

19. Pour $n$ dans $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin\left((2n+1)\dfrac{x}{2}\right) dx$.

    (a) Montrer qu'il existe $A$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |v_n| \leqslant \dfrac{A}{2n+1}$.

    On pourra, pour ce faire, effectuer une intégration par parties en admettant ici que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

    (b) En déduire la limite de la suite $v$.