Devoir Surveillé 03 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. • Pour $z=5$, $z'=\dfrac{6}{3}=2$; $|z'|=2$;

   • Pour $z=1+\mathrm{i}$, $z'=\dfrac{2+2\mathrm{i}-4}{1-\mathrm{i}-2}=\dfrac{-2+2\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}}=\dfrac{(-2+2\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}=\dfrac{2-2-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}}{1+1}=-2\mathrm{i}$. Donc $|z'|=2$.

2. (a) On a $|z-2|=\mathrm{A}M$ et $|\overline{z}-2|=\mathrm{A}N$.

   (b) De $z'=\dfrac{2z-4}{\overline{z}-2}$, on déduit pour les modules que $|z'|=\left|\dfrac{2z-4}{\overline{z}-2}\right|=\dfrac{|2z-4|}{|\overline{z}-2|}=\dfrac{2|z-2|}{|\overline{z}-2|}=\dfrac{2\mathrm{A}M}{\mathrm{A}N}$.

   Or M et N sont les points d'affixes conjuguées et comme A appartient à l'axe des abscisses on a $\mathrm{A}M=\mathrm{A}N$.

   On a donc finalement $|z'|=2$. Ce résultat montre que les points M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

3. Si $z=x+\mathrm{i}y$, alors $z'=-2 \Leftrightarrow \dfrac{2z-4}{\overline{z}-2}=-2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2\mathrm{i}y-4}{x-\mathrm{i}-2}=-2 \Leftrightarrow 2x+2\mathrm{i}y-4=-2(x-\mathrm{i}-2) \Leftrightarrow 4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$. Comme $z\neq 2$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}y$ avec $y\neq 0$ autrement dit la droite d'équation $x=3$ privée du point A.

4. $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}}=\dfrac{z-2}{z'-(-2)}=\dfrac{z-2}{z'+2}=\dfrac{z-2}{\frac{2z-4}{\overline{z}-2}+2}=$

   $\dfrac{z-2}{\frac{2z-4+2(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2}}=\dfrac{(z-2)(\overline{z}-2)}{2z-4+2\overline{z}-4}=\dfrac{(z-2)\left(\overline{z}-\overline{2}\right)}{2(z+\overline{z})-8}=\dfrac{(z-2)\overline{(z-2)}}{2(z+\overline{z})-8}$.

   Si $z=x+\mathrm{i}y$, avec $z\neq 2$, alors $(z-2)\overline{(z-2)}=(x-2)^2+y^2\in\mathbb{R}$ et $z+\overline{z}=2x\in\mathbb{R}$, ce qui montre que $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\mathrm{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\mathrm{B}M'}}}\in\mathbb{R}$.

   Géométriquement si ce que quotient est un réel c'est que les termes complexes ont le même argument, c'est-Ã -dire que les droites $(\mathrm{A}M)$ et $(\mathrm{B}M')$ sont parallèles.

5. Le point M' appartient au cercle de centre O de rayon et à la parallèle à $(\mathrm{A}M)$ contenant le point B. On peut construire pour la parallèle le symétrique de A autour du milieu de $[\mathrm{B}M]$.

Exercice 2
Première partie

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I=]0;\frac{1}{2}[$: $xy'+y=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

1. Equation homogène : (EH) : $y'+\frac{1}{x}y=0$

   Soit la fonction a définie sur I par $a(x)=\frac{1}{x}$. Elle est continue sur I donc admet des primitives sur I. Soit A une primitive de a sur I.

   $\forall x\in I, A(x)\ln|x|=\ln x$ car $x>0$ alors $e^{-A(x)}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{EH}=\{f_k : x\mapsto \frac{k}{x},\quad k\in\mathbb{R}\}}$

2. On pose $y_0(x)=\frac{k(x)}{x}$ où k est une fonction dérivable sur I. Alors $\forall x\in I, y_0'(x)=\frac{k'(x)x-k(x)}{x^2}$ et on reporte dans (E) : $x\frac{k'(x)x-k(x)}{x^2}+\frac{k(x)}{x}=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\Leftrightarrow k'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ d'où $k(x)=\mathrm{Arcsin}(2x)$

   Une solution particulière de (E) est donc la fonction y_0 définie par : $\boxed{\forall x\in I, y_0(x)=\frac{\mathrm{Arcsin}(2x)}{x}}$

3. Les solutions de (E) sur I sont obtenues en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E=\{f_k : x\mapsto \frac{k}{x}+\frac{\mathrm{Arcsin}(2x)}{x},\quad k\in\mathbb{R}\}}$

4. $g(\frac{1}{4})=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow 4k+4\,\mathrm{Arcsin}(\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow 4k+4\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow k=0$

   g est donc la fonction définie par : $\boxed{\forall x\in I,\quad g(x)=\frac{\mathrm{Arcsin}(2x)}{x}}$

Deuxième partie

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{\mathrm{Arcsin}(2x)}{x}$

5. La fonction Arcsin est définie sur $[-1;1]$ or $2x\in[-1;1]\Leftrightarrow x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ ainsi la fonction $x\mapsto\mathrm{Arcsin}(2x)$ est définie sur $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

   Par ailleurs la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ alors : $\underline{f \text{ est définie sur } D=[-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}]}$.

6. $\forall x\in D, -x\in D$ et $f(-x)=\frac{\mathrm{Arcsin}(-2x)}{-x}=\frac{-\mathrm{Arcsin}(2x}{-x}$ car la fonction Arcsin est impaire.

   Ainsi $\forall x\in D, f(-x)=f(x)$ donc $\underline{f \text{ est paire}}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(2x)-\mathrm{Arcsin}(2\times 0)}{x-0}=2\times arcsin'(0)$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=2}$

8. f est continue sur D en tant que quotient de fonctions continues sur D avec un dénominateur ne s'annulant pas sur D.

   La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ alors la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ et par suite f est dérivable sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$.

9. $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$
   or $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[, x^2 > 0$ donc f' est du signe de la fonction h définie par $\boxed{h(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)}$

10. h est dérivable sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$, donc h est dérivable sur $]0;\frac{1}{2}[$.

    $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, \quad h'(x) = \frac{2\sqrt{1-4x^2} - \frac{-8x.2x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$

    Ainsi $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h'(x) > 0$ donc $\underline{h \text{ est strictement croissante sur }]0;\frac{1}{2}[}$

    Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ alors on en déduit que $\underline{\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h(x) > 0}$

11. D'après l'étude précédente, $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$. De plus f est paire donc f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};0[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$			0			$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$\|$	$-$		$\|$		$+$	$\|$
$f(x)$	π	$\searrow$	2	$\|$	2	$\nearrow$	π

12. f est continue et strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]0;\frac{1}{2}[$ sur un $\boxed{J =]2;\pi[}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur J.

13. $\frac{1}{4} \in]0;\frac{1}{2}[$ donc l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $x = f(\frac{1}{4}) = 4\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$

    Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{2\pi}{3}\}}$

Exercice 3

1. Soit $A \in P(E)$.
   (a) Par définition de l'application , $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \overline{A}$ et $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$
   (b) Par définition , $\forall x \in \overline{A}, \chi_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - \chi_A(x)$ et $\forall x_i n A, \chi_{\overline{A}}(x) = 0 = 1 - \chi_A(x)$ donc $\boxed{\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A}$.

2. Soient A et B deux parties de E.
   (a) - Soit $A \subset B$.
       Si $x \in A$ alors $x \in B$ et donc $\chi_A(x) = 1 \leq \chi_B(x) = 1$
       Si $x \in B - A$ alors $\chi_A(x) = 0 \leq \chi_B(x) = 1$
       Si $x \in E - B$ alors $\chi_A(x) = 0 \leq \chi_B(x) = 0$
       Ainsi dans tous les cas , $\forall x \in E, \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$
     - Réciproquement, supposons que $A \not\subset B$ alors $\exists x \in A, x \notin B$ d'où $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_B(x) = 0$
       ainsi $\exists x \in E, \chi_A(x) > \chi_B(x)$ alors par contraposée, $\forall x \in E, \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \Rightarrow A \subset B$
     - Conclusion : $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E, \chi_A(x) \leq \chi_B(x)}$
   (b) En échangeant les rôles de A et B dans le résultat précédent il vient $\boxed{A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B}$.
   (c)

$x \in$	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A \cup B}$
$\chi_A(x)$	1	1	0	0
$\chi_B(x)$	1	0	1	0
$\chi_A(x)\chi_B(x)$	1	0	0	0
$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$	1	1	1	0

   Donc $\boxed{\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B}$.
   (d) et $\boxed{\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B}$.

3. (a) D'après le 2b), $\chi_A = \chi_B \Leftrightarrow A = B$ donc l'application $\begin{array}{l} f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ \quad A \mapsto \chi_A \end{array}$ est $\underline{\text{injective}}$.
   (b) Soit g une application de E dans $\{0;1\}$. On pose $A = \{x \in E, g(x) = 1\}$.
       Ainsi $\forall x \in A, g(x) = 1$ et $\forall x \in \overline{A}, g(x) = 0$ donc $g = \chi_A$: $\underline{f \text{ est surjective}}$.

Exercice 4
A. Généralités sur f.

1. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$. Par ailleurs $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$ alors
   le domaine de définition D de f est $\boxed{D = \mathbb{R} - \{0[\pi]; \frac{\pi}{2}[\pi]\}}$.

2. D est symétrique par rapport à l'origine et $\forall x \in D, f(-x) = \frac{\cos(-x)-1}{\tan(-x)} = \frac{\cos x - 1}{-\tan x} = -f(x)$ donc f est impaire.

3. $\forall x \in D, x+2\pi \in D$ et $f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)-1}{\tan(x+2\pi)} = f(x)$ car la fonction cos est 2π-périodique et la fonction tan est π-périodique. Alors f est 2π-périodique.

4. f étant 2π-périodique il suffit d'étudier f sur $E = [-\pi;\pi] \cap D$ puis on effectue des translations de vecteurs $2k\pi \vec{i}, k \in \mathbb{Z}$ de la courbe obtenue pour compléter la courbe sur D.

   De plus f est impaire alors sa courbe représentative étant symétrique par rapport à l'origine on peut encore réduire à $\boxed{D' = [0;\pi] \cap D =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[}$.

B. Étude de la fonction f sur $D' =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$.

5. $\frac{\cos x - 1}{x-0}$ tend vers 0 et $\frac{x-0}{\tan x - 0}$ tend vers 1 et donc $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$

6. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\cos x - 1) = -1$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ alors $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0}$.

   $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\cos x - 1) = -1$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ alors $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0}$.

7. $\lim_{x \to \pi^-} (\cos x - 1) = -2$ et $\lim_{x \to \pi^-} \tan x = 0^-$ alors $\boxed{\lim_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty}$.

8. f est dérivable sur D' en tant que quotient de fonctions dérivables sur D' avec un dénominateur ne s'annulant pas sur D'.

   $\forall x \in D', f'(x) = \frac{-\sin x \tan x - (1+\tan^2 x)(\cos x - 1)}{\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \underset{=}{-\sin x \tan x - \frac{1}{\cos^2 x}(\cos x - 1)} \frac{-\sin^2 x \cos x - \cos x + 1}{\sin^2 x}$

   d'où $\forall x \in D', f'(x) = \frac{\cos^3 x - 2\cos x + 1}{\sin^2}$ or $(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1) = \cos^3 x + \cos^2 x - \cos x - \cos^2 x - \cos x + 1 = \cos^3 x - 2\cos x + 1$

   donc pour tout x appartenant à D' on a $\boxed{f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\sin^2 x}}$

9.
   - $\forall x \in D', \cos x - 1 < 0$ et $\sin^2 x > 0$.
   - On étudie le signe de $\cos^2 x + \cos x - 1$: on pose $X = \cos x \in [-1;1]$ alors l'équation $\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ devient $X^2 + X - 1 = 0$: $\Delta = 5$; cette équation admet 2 racines réelle $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [-1;1]$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [-1;1]$

   on en déduit que $\cos^2 x + \cos x - 1 = \left(\cos x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\cos x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

   or $\cos x \in [-1;1]$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ alors $\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

   par ailleurs $\begin{cases} \cos x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \geq 0 \\ x \in D' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \in D' \end{cases} \Leftrightarrow x \in]0; \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$

   - Finalement $\boxed{\forall x \in]0; \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}], f'(x) \leq 0}$ et $\boxed{\forall x \in]\,\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[, f'(x) >}$

10. $f(\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-3)\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$

x	0		$\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	$\Vert$	$-$		$+$	$\Vert$		$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$f(\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$	$\nearrow$ 0	$\Vert$	0 $\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$

C. Utilisation d'une primitive de f.

11. Soit $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - 1}{\tan x} dx$. On pose $t = \cos x$ car la fonction cos est de classe C^1 sur $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]$ et réalise une bijection de $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]$ sur $[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}]$. De plus $dt = -\sin x dx$ alors

   $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t(t-1)}{1-t^2}(-dt) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1+t} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t+1-1}{1+t} dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{1+t}) dt = [t - \ln|1+t|]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}$

   Conclusion : $\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$

12. Sur l'intervalle $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]$ la courbe est située sous l'axe des abscisses donc l'aire, en unités d'aires de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$ est égale à $\boxed{-I}$.

D. Une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \frac{2}{\sin(2x)} y(x) = -\cos x$

13. (a) Soit $X \in]0;\frac{\pi}{2}[$. On pose $L(X) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{X} \frac{2}{\sin(2x)} dx$. On considère le changement de variable $t = \tan x$.

la fonction tan est de classe C^1 sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}[$ sur $]0;+\infty[$. De plus $dt=(1+\tan^2 x)dx$ alors

$$L(X)=\int_{\tan\frac{\pi}{4}}^{\tan X}\frac{2}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\tan X}\frac{1}{t}dt=[\ln|t|]_1^{\tan X}=\boxed{\ln|\tan X|}$$

(b) l'équation homogène (H) associée à (E) est : $y'(x)+\dfrac{2}{\sin(2x)}y(x)=0$

Soit la fonction a définie sur I par $a(x)=\frac{2}{\sin 2x}$. Elle est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ donc admet des primitives sur $]0;\frac{\pi}{2}[$. Soit A une primitive de a sur $]0;\frac{\pi}{2}[$. D'après la question précédente ,

$\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}[, A(x)=\ln|\tan x|=\ln(\tan x)$ car $\tan x>0$ sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ alors $e^{-A(x)}=e^{-\ln\tan x}=\frac{1}{\tan x}$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_H=\{f_k : x\mapsto \frac{k}{\tan x},\quad k\in\mathbb{R}\}}$

14. $\forall x\in]0;\frac{\pi}{2}[, f'(x)+\frac{2}{\sin(2x)}f(x)=\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x-1)}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\frac{\cos x-1}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}(\cos^2 x+\cos x-1+1)=\frac{(\cos x-1)\cos x(\cos x+1)}{1-\cos^2 x}=-\cos x$

Conclusion : f est solution particulière de (E)

15. Solutions de (E) sur $]0;\frac{\pi}{2}[$: $\boxed{\mathcal{S}_E=\{f_k : x\mapsto \frac{k+\cos x-1}{\tan x},\quad k\in\mathbb{R}\}}$

E. Des suites

16. Equivalent de g_n au voisinage de 0 : $g_n\underset{0}{\sim}\frac{(2n+1)\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ donc $\boxed{g_n\underset{0}{\sim}2n+1}$.

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}g_n(x)=2n+1}$

On dit que la fonction g_n est prolongeable par continuité en 0 et on note encore g_n le prolongement obtenu sur $[0;\pi]$

17. $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^n\sin\frac{x}{2}\cos(kx)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}\left(\sin(k+\frac{1}{2})x+\sin(\frac{1}{2}-k)x\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x\right)$

on obtient donc une somme télescopique

$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)f_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sum_{j=0}^{n-1}\sin(j+\frac{1}{2})x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(\frac{x}{2})\right)$

donc $\boxed{\forall x\in]0,\pi],\quad f_n(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}g_n(x)}$

18. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose : $u_n=\displaystyle\int_0^\pi g_n(x)dx$.

$g_n(x)=2f_n(x)+1$ donc $u_n(x)=2\displaystyle\int_0^\pi f_n(x)dx+\int_0^\pi 1dx=2\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\cos(kx)dx+\pi$ par linéarité de l'intégrale.

donc $u_n(x)=2\displaystyle\sum_{k=1}^n\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi+\pi=\pi$

Conclusion : la suite (u_n) est constante et $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*;u_n=\pi}$.

19. Pour n dans $\mathbb{N}$ on pose $v_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)dx$.

(a) On effectue une intégration par parties en posant $\begin{array}{ll} u(x)=f(x) & u'(x)=f'(x)\\ v'(x)=\sin(2n+1)\dfrac{x}{2} & v(x)=\dfrac{-2}{2n+1}\end{array}$

Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0;\frac{\pi}{4}]$

alors $v_n=\underbrace{\left[-\dfrac{2}{2n+1}\cos(2n+1)\dfrac{x}{2}f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{=0}+\dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f'(x)\cos(2n+1)\frac{x}{2}dx$

ainsi d'après la propriété de la valeur absolue pour les intégrales il vient :

$|v_n|\le\frac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f'(x)||\cos(2n+1)\frac{x}{2}|dx\le\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f'(x)|dx$ car $\forall x\in[0;\frac{\pi}{4}],|\cos(2n+1)\frac{x}{2}|\le 1$

On pose $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f'(x)|dx$ nombre réel fini car f' est continue sur $[0;\frac{\pi}{4}]$

Conclusion : $\boxed{\text{il existe } A \text{ dans } \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |v_n|\leqslant\dfrac{A}{2n+1}.}$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{A}{2n+1}=0$ et $0\le v_n\le\frac{A}{2n+1}$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0}$ par théorème d'encadrement.