Devoir Surveillé 04 - Eléments de Correction

Exercice 1

$$z' = z^2 + 1.$$

1. Trouver les antécédents de O revient à résoudre l'équation :
   $z' = 0 = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 = -1$; les solutions sont i et $-$i.
   Les points d'affixe i et $-$i ont pour image le point O.
2. Un point $M(z)$ est invariant si son affixe vérifie :
   $z' = z = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow$
   $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$
   Les deux solutions sont $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Comme $z^2 = (-z)^2$, deux points symétriques autour de O d'affixe z et $-z$) ont la même image.
4. $z_{\mathrm{A}'} = z_{\mathrm{A}}^2 + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 + 1 = \dfrac{1}{2}(1 - 1 + 2\mathrm{i}) + 1 = 1 + \mathrm{i}.$
   $z_{\mathrm{A}'} = 1 + \mathrm{i}.$
   On a bien sûr $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$, ce qui montre que les points O, A et A$'$ sont alignés.
5. (a) Si N a pour affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors son image N' a pour affixe :
   $z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow z' - 1 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2.$
   Il en résulte en prenant les modules de chaque membre :
   $|z' - 1| = \left|\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\right| = 1^2 = 1.$
   Donc $|z' - 1| = 1$ égalité qui montre que le point N' appartient au cercle centré au point d'affixe 1, de rayon 1.

   (b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}N'}$ est :
   $z' = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = 2\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta z.$
   On a donc $\overrightarrow{\mathrm{O}N'} = 2\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{O}N}$ ce qui montre que les points O, N et N' sont alignés.

   (c) Pour un point N qui correspond à un argument θ, on projette ce point orthogonalement sur l'axe des abscisses en N_1 ; la distance de ce projeté à O est égale à $\cos\theta$, longueur que l'on double sur l'axe des abscisses pour obtenir le point N_2 ; le cercle de rayon ON_2 coupe la droite (ON) en N'

1) Soit $x \in \mathbb{R}$
* Considérons $x \geqslant 1$
  on a $x \mapsto x^2 \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$, $\frac{x}{2} \geqslant 0$ et $\sqrt{x-1} \geqslant$
  dès lors $\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1}$
  $\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 \geqslant x - 1$
  $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$
  $\Rightarrow (x-2)^2 \geqslant 0$
  $\Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap [1; +\infty[= [1; +\infty[$
  D'autre part $x \geqslant 1$,
  $\Rightarrow (x-2)^2 \geqslant 0$
  $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$
  $\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 \geqslant x - 1 \geqslant 0$
  or $x \mapsto \sqrt{x} \nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$
  $\Rightarrow \frac{1}{2}|x| \geqslant \sqrt{x-1}$ or $x \geqslant 0$
  $\Rightarrow \frac{1}{2}x \geqslant \sqrt{x-1}$
* Considérons $x < 1$
  $\sqrt{x-1}$ n'est pas défini
  et $\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1}$ n'a pas de solution
  dans $]-\infty; 1[$

Finalement $\frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$
$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geqslant \sqrt{x-1}$
$\Leftrightarrow x \geqslant 2\sqrt{x-1}$
$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} \geqslant 0.$

3) Soit $x \in [1; +\infty[$,
$\sqrt{x-1} \geqslant 0$ $x \geqslant 0$
donc $x + 2\sqrt{x-1} \geqslant 0.$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$B(x)$ existe $\Leftrightarrow x+2\sqrt{x-1} \geq 0$ et $x-2\sqrt{x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow x+2\sqrt{x-1}$ et $x \in [1;+\infty[$

$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$.

5) Soit $x \in [1;+\infty[$,

$B(x)^2 = x+2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-4(x-1)} + x - 2\sqrt{x-1}$

$B(x)^2 = x+2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-2)^2} + x - 2\sqrt{x-1}$

$B(x)^2 = 2x + 2|x-2|$

6) $\forall x \in [1;+\infty[$, $B(x) \geq 0$

donc $B(x) = \sqrt{2x+2|x-2|}$.

- Si $x \in [1;2]$, $|x-2| = 2-x$ et $B(x) = \sqrt{2x+4-2x} = 2$
- Si $x \in [2;+\infty[$, $|x-2| = x-2$ et $B(x) = \sqrt{2x+2x-4} = 2\sqrt{x-1}$

Exercice 3
cf DM03

Exercice 4
On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} & (1) \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} & (2) \end{cases}$$

On cherche les solutions deux fois dérivables.
$(2) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}$
En utilisant (1) il vient : $y'' = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}}$
donc y est solution de l'équation différentielle du second ordre : $y'' - \frac{1}{4}y = 0$
Les solutions de cette équation sont les fonctions définies par $y(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Be^{-\frac{t}{2}}$, $\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$

On reporte maintenant dans (2) :
$x(t) = 2y'(t) + e^{-\frac{t}{2}} = Ae^{\frac{t}{2}} - Be^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}$

Réciproquement, on reporte les deux expressions trouvées dans le système différentiel :
$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}Ae^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}Be^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}Ae^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}Be^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 0 = 0$
$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}Ae^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}Be^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}Ae^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}Be^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 0 = 0$

Conclusion : les solutions du systèmes sont les fonctions x et y définies par :
$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = Ae^{\frac{t}{2}} - Be^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \text{ et } y(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Be^{-\frac{t}{2}}, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2}$

Exercice 5
A tout entier naturel $n \geq 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1;+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On pose pour tout réel x de I, $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(t)dt$

1. (a) f_n est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I avec un dénominateur ne s'annulant pas sur I et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I$,
$f_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{n(\ln x)^{n-1}x - 2x(\ln x)^n}{x^4} = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{n!x^3}(n - 2\ln x)$
or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I$, $\dfrac{(\ln x)^{n-1}}{n!x^3} \geq 0$ ainsi $f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \geq \ln x \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{n}{2}}$
comme $n \geq 1$ alors $\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{n}{2}} \geq e^0 = 1$
f_n est croissante sur $[1; e^{\frac{n}{2}}[$ et décroissante sur $]e^{\frac{n}{2}}; +\infty[$.

x	1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	y_n	$\searrow$	0

(b) La valeur maximale de f_n sur I est $f_n(e^{\frac{n}{2}}) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$ donc
$\boxed{y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n}$

(c) $\forall x > 1, \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{(n+1)!}\dfrac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} \times \dfrac{n!x^2}{(\ln x)^n} = \boxed{\dfrac{\ln x}{n+1}}$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_{n+1} = f_{n+1}\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \dfrac{\left(\ln e^{\frac{n+1}{2}}\right)^n \ln e^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)n!} = \dfrac{\ln e^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$

Conclusion : $\boxed{y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n}{2} \Rightarrow e^{\frac{n+1}{2}} > e^{\frac{n}{2}}$ car la fonction exp est strictement croissante sur I

$\Rightarrow f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) < f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$ car f_n est strictement décroissante sur $[e^{\frac{n}{2}}; +\infty[$

$\Rightarrow y_{n+1} < \dfrac{1}{2} y_n$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n}$.

(e) La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante ; elle est minorée par 0 donc elle converge.

D'après le résultat précédent on prouve aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq y_n$ par définition de y_n.

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ alors

d'après le théorème d'encadrement il vient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0}$

2. (a) On effectue une intégration par parties en posant

$u' = \dfrac{1}{t^2} \qquad u = -\dfrac{1}{t}$

$v = \ln t \qquad v' = \dfrac{1}{t}$

les fonctions u et v étant de classe C^1 sur I alors

$\forall x \geq 1, I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dx = \left[\frac{-1}{t}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t^2} dt = \frac{-\ln x}{x} + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$

Conclusion : $\boxed{I_1(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1}$.

(b) On effectue une intégration par parties en posant

$u' = \dfrac{1}{t^2} \qquad u = -\dfrac{1}{t}$

$v = (\ln t)^{k+1} \qquad v' = \dfrac{(k+1)(\ln t)^k}{t}$

les fonctions u et v étant de classe C^1 sur I alors

$\forall x \geq 1, I_{k+1}(x) = \displaystyle\frac{1}{(k+1)!}\int_1^x \frac{(\ln t)^{k+1}}{t^2} dx = \frac{1}{(k+1)!}\left(\left[\frac{-1}{t}(\ln t)^{k+1}\right]_1^x + \int_1^x \frac{(k+1)(\ln t)^k}{t^2} dt\right) =$

$-\dfrac{1}{(k+1)!}\dfrac{(\ln x)^{k+1}}{x} + I_k(x)$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}}$

(c) D'après le résultat précédent on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} I_{k+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$

on reconnait des sommes télescopique donc on obtient en posant $j = k+1$

$I_{n+1}(x) = I_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{(j)!}\frac{(\ln x)^j}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{(j)!}\frac{(\ln x)^j}{x} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{(j)!}\frac{(\ln x)^j}{x}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k!x}}$

3. Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.

(a) Par positivité de l'intégrale on a déjà $0 \leq I_n(\alpha)$

Par ailleurs puisque y_n est le maximum de f_n on a $\forall t \in [1; \alpha], f_n(t) \leq y_n \Rightarrow \displaystyle\int_1^\alpha f_n(t)dt \leq y_n(\alpha - 1)$ par croissance de l'intégrale.

Conclusion : $\boxed{0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)y_n}$

(b) D'après le théorème d'encadrement sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ il vient

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)}$

4. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k!}$

(a) $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} w_n(x) \Rightarrow w_n(x) = x - xI_n(x)$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, \forall x \geq 1, w_n(x) = x - xI_n(x)}$

(b) Ainsi $w_n(\alpha) = \alpha - I_n(\alpha)$ donc d'après le résultat du 4b : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(\alpha) = \alpha}$

(c) On pose $\alpha = e > 1$ alors $w_n(e) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et d'après la question précédente $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n(e) = e$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$

Exercice 6

$j = e^{i\,2\pi/3}$, $\mathcal{A} = \{a + b\,j \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Notons que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \overline{j}$

1. $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Montrons que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$:
   — $\mathcal{A}$ contient 1 et -1 puisque $\pm 1 = \pm 1 + 0\,j$ avec $(\pm 1, 0) \in \mathbb{Z}^2$
   — $\mathcal{A}$ est stable pour '+' puisque $\forall\ a + b\,j\,,\ a' + b'\,j \in \mathcal{A}$ $(a,b,a',b' \in \mathbb{Z})$
   $$(a + b\,j) + (a' + b'\,j) = \underbrace{(a + a')}_{\in\,\mathbb{Z}} + \underbrace{(b + b')}_{\in\,\mathbb{Z}}\, j \in \mathcal{A}$$
   — $\mathcal{A}$ est stable pour '×' puisque $\forall\ a + b\,j\,,\ a' + b'\,j \in \mathcal{A}$ $(a,b,a',b' \in \mathbb{Z})$
   $$\begin{aligned}(a + b\,j) \times (a' + b'\,j) &= a\,a' + (a\,b' + a'\,b)\,j + b\,b'\,\underbrace{(-1 - j)}_{= j^2} \\ &= \underbrace{(a + a' - b\,b')}_{\in\,\mathbb{Z}} + \underbrace{(a\,b' + a'\,b - b\,b')}_{\in\,\mathbb{Z}}\, j \in \mathcal{A}\end{aligned}$$
   Sous-anneau d'un corps commutatif : $\boxed{(\mathcal{A}, +, \times) \text{ est un anneau commutatif intègre}}$
2. Nous avons $\mathcal{U}_6 = \{1, e^{i\,2\pi/6}, e^{i\,4\pi/6}, e^{i\,6\pi/6}, e^{i\,8\pi/6}, e^{i\,10\pi/6}\}$ $= \{1, -j^2, j, -1, j^2, -j\}$ $\boxed{\mathcal{U}_6 \subset \mathcal{A}}$

   D'autre-part, les éléments de $\mathcal{U}_6$ sont inversibles dans $\mathcal{C}$ $(x \in \mathcal{U}_6 \Rightarrow x^6 = 1 \Rightarrow x \neq 0)$ et $\forall\ x \in \mathcal{U}_6$, $\left(\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{1}{x^6} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{U}_6$

   $\boxed{\mathcal{U}_6 \text{ contient ses inverses}}$

   Note : l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathcal{U}$.
3. $u = 1 + j$ et $U = \{u^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ($k \in \mathbb{Z}$ est possible car $1 + j \neq 0$)
   (a) Comme $1 + j = -j^2$, nous avons $u^6 = j^{12} = 1 = u^0$.

   Ainsi, pour tout entier relatif n, la division euclidienne $n = 6\,k + r$ $0 \leqslant r \leqslant 5$ montre que $u^n = (u^6)^k\,u^r = 1^k\,u^r = u^r \in \{u^0, u^1, u^2, u^3, u^4, u^5\}$

   De plus, $\{u^0, u^1, u^2, u^3, u^4, u^5\} = \mathcal{U}_6$ est constitué de 6 éléments différents.

   $\boxed{U = \mathcal{U}_6 \text{ est constitué de 6 éléments.}}$

   (b) $\mathcal{U}_6$ est un sous-ensemble de $\mathcal{U}$, non vide, stable pour "×", et contenant ses inverses.

   $\boxed{\mathcal{U}_6 \text{ est un groupe multiplicatif}}$
4. $\forall\ z \in \mathcal{A}$, $N(z) = z\,\overline{z}$.
   (a) Tout élément z de $\mathcal{A}$ s'écrit $z = a + b\,j$ avec $(a,b) \in \mathcal{Z}^2$. Alors (voir **1**)
   $$N(z) = (a + b\,j)\,(a + b\,j^2) = a^2 + \underbrace{b^2\,j^3}_{= b^2} + a\,b\,\underbrace{(j + j^2)}_{= -1} = a^2 - a\,b + b^2 \in \mathbb{Z}$$
   $\boxed{\forall\ z = a + b\,j \in \mathcal{A},\ N(z) = a^2 - a\,b + b^2 \in \mathbb{Z} \quad (a,b) \in \mathbb{Z}}$

   (b) Soit $(u,v) \in \mathcal{A}$. u divise $v \Leftrightarrow \exists\ z \in \mathcal{A},\ v = u\,z$.

   Alors : $N(v) = v\,\overline{v} = u\,z\,\overline{u\,z} = u\,z\,\overline{u}\,\overline{z} = u\,\overline{u}\,z\,\overline{z} = N(u)\,N(z)$

   où $N(u), N(v), N(z) \in \mathbb{N}$, d'où $\boxed{u \text{ divise } v \Rightarrow N(u) \text{ divise } N(v) \text{ dans } \mathbb{N}}$
5. H désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ inversibles dans $\mathcal{A}$.
   (a) Pour tout élément $z \in H$ nous avons $\exists\ z' \in \mathcal{A},\ z\,z' = 1$ donc z divise 1.

   Le résultat précédent montre que $N(z)$ divise $N(1) = 1$ dans $\mathbb{N}$,

   donc $N(z) = 1$, c'est-à-dire $|z|^2 = 1$ $\boxed{z \in H \Rightarrow |z| = 1}$

   (b) Avec les notations usuelles de l'énoncé, $z = a + b\,j \in H \Rightarrow a^2 - a\,b + b^2 - 1 = 0$.

   C'est une équation du second degré en a qui doit avoir une racine entière d'où :
   — $\Delta = b^2 - 4\,(b^2 - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3\,b^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow b \in \{-1, 0, 1\}$ (b est entier)
   — L'étude des trois cas donne alors :
     — $b = -1$: $a^2 + a = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 0\}$ soit $z = -1 - j = j^2$ ou $z = -j$
     — $b = 0$: $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 1\}$ soit $z = -1$ ou $z = 1$
     — $b = 1$: $a^2 - a = 0 \Rightarrow a \in \{0, 1\}$ soit $z = j$ ou $z = 1 + j = -j^2$

   Les seules valeurs possibles pour z sont les éléments de $\mathcal{U}_6$ donc $H \subset \mathcal{U}_6$.

   Comme les éléments de $\mathcal{U}_6$ sont inversibles dans $\mathcal{U}_6$, donc dans $\mathcal{A}$ (voir **2**) nous pouvons en déduire que

   $\boxed{z \in \mathcal{A} \text{ est inversible dans } \mathcal{A} \Leftrightarrow z \in H = \mathcal{U}_6}$
6. Recherche des diviseurs de $\omega = 1 - j$.
   (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $z = a + b\,j$. Nous avons $N(z) = 3 \Leftrightarrow a^2 - a\,b + b^2 - 3 = 0$

   On reprend le raisonnement de la question précédente, ce qui donne :

— $\Delta = b^2 - 4\,(b^2 - 3) \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (b est entier)
— L'étude des différents cas donne alors :
  — $b = -2$: $a^2 + 2\,a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ soit $z = -1 - 2\,j$
  — $b = -1$: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-2, 1\}$ soit $z = -2 - j$ ou $z = 1 - j$
  — $b = 0$: $a^2 - 3 = 0$ qui n'a pas de solutions entières
  — $b = 1$: $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1, 2\}$ soit $z = -1 + j$ ou $z = 2 + j$
  — $b = 2$: $a^2 - 2\,a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ soit $z = 1 + 2\,j$

$$\boxed{N(z) = 3 \Leftrightarrow z \in \mathcal{D} = \{\, -2 - j\,,\, -1 - 2\,j,\,,\, -1 + j\,,\, 1 - j\,,\, 1 + 2\,j\,,\, 2 + j\,\}}$$

(b) D'après **4-b**, z divise $\omega \Rightarrow N(z)$ divise $N(\omega) = 3 \Rightarrow N(z) = 1$ ou $N(z) = 3$.
— $N(z) = 1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{U}_6$ (voir **5-b**).
  Tous ces éléments z conviennent puisqu'ils sont inversibles dans $\mathcal{U}_6$:
  $\omega = z \times \left(\frac{1}{z}\,\omega\right)$ où $\frac{1}{z}\,\omega \in \mathcal{A}$ (produit de deux éléments de $\mathcal{A}$)
— $N(z) = 3$ est étudié ci-dessus (**6-a**).
  Il suffit de vérifier que ces éléments divisent θ en calculant les quotients :
$$\frac{\omega}{-2 - j} = \frac{1 - j}{-2 + (1 + j^2)} = \frac{1 - j}{(-1 + j)\,(1 + j)} = \frac{-1}{1 + j} = j \in \mathcal{A}$$
  Les cinq autres quotients donnent les cinq autres éléments de $\mathcal{U}_6$ qui sont dans $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Les diviseurs de } \omega \text{ sont les éléments de } \mathcal{U}_6 \cup \mathcal{D}}$$

Note : les éléments de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{U}_6$ sont associés par paires (de produit ω) :

$\omega = (-2 - j)\,(j)$ $\quad \omega = (-1 - 2\,j)\,(1 + j)$ $\quad \omega = (-1 + j)\,(-1)$
$\omega = (1 - j)\,(1)$ $\quad \omega = (1 + 2\,j)\,(-1 - j)$ $\quad \omega = (2 + j)\,(-j)$

7. Puisque $\omega \in \mathcal{A}$ qui est stable pour le produit, il lest clair que $I = \omega\,\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.
   Montrons que I est un sous-groupe de $\mathcal{A}$:
   — $I \neq \varnothing$ par exemple, il contient le produit $\omega\,\omega$
   — I est stable pour l'addition : la somme de deux éléments de I est de la forme
$$\lambda\,\omega + \lambda'\,\omega = (\lambda + \lambda')\,\omega \quad \text{où} \quad \lambda, \lambda' \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda + \lambda' \in \mathcal{A}\,.$$
   — I contient ses opposés puisque $-(\lambda\,\omega) = (-\lambda)\,\omega$ où $\lambda \in \mathcal{A} \Rightarrow -\lambda \in \mathcal{A}$

$$\boxed{I = \omega\,\mathcal{A} \text{ est un sous-groupe du groupe abélien } \mathcal{A}}$$

   Montrons que $Z \cap I \subset 3\,\mathbb{Z}$: si l'entier n appartient à I, alors $\exists\, \lambda \in \mathcal{A},\ n = \lambda\,\omega$ donc ω divise n. Mais alors $N(\omega)$ divise $N(n)$, c'est-à-dire que 3 divise n^2 dans $\mathbb{N}$, donc 3 divise n (puisque 3 est un nombre premier). n est bien multiple de 3.

   Réciproquement, puisque $N(w) = 3$ s'écrit $\omega\,\overline{\omega} = 3$, tout élément $n = 3\,k \in 3\,\mathbb{Z}$ s'écrit $n = \omega\,\overline{\omega}\,k$ où $\overline{\omega}\,k \in \mathcal{A}$ (produit de deux éléments de $\mathcal{A}$), donc $n \in I$. $\boxed{\mathbb{Z} \cap I = 3\,\mathbb{Z}}$

8. Nous avons vu que les diviseurs de ω sont :
   — les éléments r de $\mathcal{U}_6$ qui sont inversibles
   — les éléments d de $\mathcal{D}$ qui sont de la forme $d = \frac{\omega}{r}$ où $r \in \mathcal{U}_6$. On en déduit que $d = \lambda\,\omega$ où $\lambda = \frac{1}{r} \in \mathcal{U}_6$ est bien inversible.

   Les diviseurs de ω sont de la forme λ ou $\lambda\,\omega$, avec λinversible $\boxed{\omega \text{ est premier}}$