Devoir Surveillé 03

Le vendredi 7 Novembre 2025

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère la transformation ponctuelle f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 1.$$

1. Déterminer les antécédents du point O.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.
3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$. Déterminer l'affixe du point A′ image de A par f puis prouver que les points O, A et A′ sont alignés.
5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ et N le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   (a) Lorsque θ décrit $[0\ ;\ 2\pi[$, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   (b) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{O}N'} = 2\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{O}N}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.
   (c) Expliquer la construction du point N'.

Exercice 2
On pose pour x réel,

$$B(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$x - 2\sqrt{x-1} \geq 0$$
2. Démontrer que l'ensemble de définition de B est $[1; +\infty[$.
3. Démontrer que $\forall x \in [1; +\infty[$,
$$(B(x))^2 = 2x + 2|x-2|$$
4. En déduire, sans le symbole valeur absolue et selon les valeurs de x, la valeur de $B(x)$.

Exercice 3
Soit, pour $x \in I = \left]0, \pi\right[$, les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}(E_1) :& \quad y'\sin(x) - y\,\cos(x) = \sin^2(x)\,e^x \\ (E_2) :& \quad y'' + y = \big(\sin(x) + 2\,\cos(x)\big)\ e^x\end{aligned}$$

1. Sans intégrer les équations, montrer que l'ensemble des solutions de (E_1) est inclus dans l'ensemble des solutions de (E_2). *Pour cela on montrera qu'une solution de (E_1) est deux fois dérivables et qu'elle vérifie (E_2).*
2. (a) Justifier le changement de fonction inconnue $z = \dfrac{y}{e^x}$. *Pour cela on montrera que z est deux fois dérivable si et seulement si y l'est.*

   (b) Quelle est l'équation (E_3) obtenue quand on applique ce changement à (E_2) ? *Pour répondre à cette question, on calculera y' et y'' à partir de l'égalité $z \times e^x = y$.*

   (c) Intégrer (E_3). *Autrement dit résoudre (E_3) en tant qu'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.*

   En déduire les solutions réelles de (E_2), puis les solutions réelles de (E_1). *Autrement dit exprimer y à partir de z pour obtenir les solutions de (E_2). Puis trier parmi les solutions de (E_2) celles qui vérifient (E_1).*
3. Intégrer directement l'équation (E_1). Comparer les résultats.

Exercice 4
On considère le système différentiel (S) :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$$

1. Les solutions x et y de (S) sont dérivables. En déduire que x' et y' le sont aussi.
2. Montrer que (x, y) est solution de (S) implique que y est solution de $y'' - \frac{1}{4}y = 0$.
3. Résoudre $y'' - \frac{1}{4}y = 0$.
4. Conclure que les solutions de (S) sont les couples (x, y) tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = Ae^{\frac{t}{2}} - Be^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \text{ et } y(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Be^{-\frac{t}{2}}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 5

A tout entier naturel $n \geq 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On pose pour tout réel x de I, $I_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(t)dt$

1. (a) Etudier les variations de f_n.
   (b) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.
   (c) Calculer pour $x > 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.
   (d) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ puis que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$.
   (e) Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$?

2. (a) $\forall x \geq 1$, calculer $I_1(x)$.
   (b) Démontrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x}$$
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k! x}$$

3. Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.
   (a) Démontrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) y_n$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha)$.

4. Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose $w_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln x)^k}{k!}$
   (a) Exprimer $w_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
   (b) Pour $\alpha \geq 1$ fixé, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n(\alpha)$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 6

Soit le complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ de module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

On note $\mathcal{A} = \left\{a + b\,j \;\text{—}\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ et on le munit de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{C}$.

Soit $(u,v) \in \mathcal{A}^2$. On dit que u divise v si et seulement si $\quad \exists z \in \mathcal{A} \quad v = u\,z$.

1. Montrer que $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre.
2. Soit $\mathcal{U}_6$ le groupe des racines $6^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
   Montrer que $\mathcal{U}_6 \subset \mathcal{A}$ et que tout élément de $\mathcal{U}_6$ a son inverse dans $\mathcal{A}$.
3. Soit $u = 1 + j$ et $U = \left\{u^k \;\text{—}\; k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (a) Montrer que U ne contient que 6 éléments que l'on déterminera.
   (b) Montrer que U est un groupe multiplicatif.
4. Pour tout $z \in \mathcal{A}$, on pose $N(z) = z\,\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
   (a) Montrer que $\forall z \in \mathcal{A} \quad N(z) \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que, si u divise v, alors $N(u)$ divise $N(v)$ dans $\mathbb{N}$.
5. Soit H l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathcal{A}$.
   (a) Montrer que $z \in H \Rightarrow \left|z\right| = 1$.
   (b) En déduire que $H = \mathcal{U}_6$.
6. On se propose de déterminer tous les diviseurs de $w = 1 - j$.
   (a) Déterminer les solutions de l'équation $N(z) = 3$
   (b) En déduire tous les diviseurs de w.
7. Montrer que $I = \left\{\lambda w \;\text{—}\; \lambda \in \mathcal{A}\right\}$ est un groupe abélien (pour l'addition),
   et que $\mathbb{Z} \cap I = 3\,\mathbb{Z}$.
8. Soit $u \in \mathcal{A}$. On le dit premier si et seulement si ses seul diviseurs s'écrivent λ ou $\lambda\,u$, avec λ inversible dans $\mathcal{A}$. Montrer que ω est premier.