

Devoir Surveillé 02

Le vendredi 23 Septembre 2022

14h-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

2. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

3. En déduire :

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k}$$

4. Conclure que

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Exercice 2

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 2 cm. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0$ et $n = 1$.

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

1. (a) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
- (b) Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

- (c) En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer que le point K $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$
3. Etudier les variations de f_0 .
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point K.
 (b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où

$$g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x.$$
- (c) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
- (d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- (e) En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$.
5. Tracer $\mathcal{C}_0$ et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. (a) Montrer que pour tout réel x , les points $M(x ; f_0(x))$ et $M'(x ; f_1(x))$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}$.
 (b) Comment obtient-on $\mathcal{C}_1$ à partir de $\mathcal{C}_0$? Tracer $\mathcal{C}_1$.

Partie B

Etude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx.$$

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1 .
3. Montrer que la suite u est positive.
4. On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
 (a) Montrer que, pour tout x réel, $k(x) = \frac{1 - e^x}{e^{nx}(1 + e^x)}$.
 (b) Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$.
 (c) En déduire que la suite u est décroissante.
5. (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1 - e^{-(n-1)}}{n-1}.$$

- (b) Calculer u_2 .
6. Soit v la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par :

$$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

- (a) Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
 (b) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

- (c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

- On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
 - Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
 - Déterminer la limite de la suite w .
- Montrer que la suite u est croissante.
 - Montrer que la suite v est décroissante.
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
- On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ .
 - Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
 - Déterminer alors la valeur de ℓ .

Exercice 4

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x) dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f , relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Etude de f .

- Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
- Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
- Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
- Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
- Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
- Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :

$$f(x) = y$$

- Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}

Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

En déduire l'ensemble de définition de F .

2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Etude de la suite (u_n) .

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3 .

(On pourra remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)

3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)