Devoir Surveillé 01

Le mardi 5 Septembre 2023
9h-12h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u ≤ seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Que représente la valeur obtenue en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir mais il n'en est pas sûr.

Comment lui apporter une réponse précise ?

Exercice 2

On considère le cube ABCDEFGH.

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$\mathrm{M}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{4}\right), \qquad \mathrm{N}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right), \qquad \mathrm{P}\left(1\ ;\ 0\ ;\ -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.
2. Tracer le cube ABCDEFGH et placer les points M, N et P.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MP}}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $\mathrm{F}(1\,;\,0\,;\,1)$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $\mathrm{L}\left(\frac{4}{7}\ ;\ \frac{24}{35}\ ;\ \frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $\mathrm{FL} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume exact du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

Exercice 3
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.

Un élève formule les conjectures suivantes à partir de la représentation graphique fournie par sa calculatrice :

1.	L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2.	Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.
3.	L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = e^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.
   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Exercice 4
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A - Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Etudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant $\mathbb{R}$, $-1<f(x)<1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. (a) α étant un nombre appartenant à $]-1\ ;\ 1[$, montrer que l'équation $f(x)=\alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.
   (b) Pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$, exprimer x_0.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t)=1-[f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis justifier que $0\leqslant f(x)\leqslant x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\dfrac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2. On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$?
   Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1-[f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2+1}-\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}\right).$$

   En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.