Devoir Surveillé 01 - Correction APMEP

Exercice 1 **Thèmes : suites**

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geqslant 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geqslant 0$. Montrons que $T_{n+1} \geqslant 20$.

$T_n \geqslant 20 \Leftrightarrow 0,955 \times T_n \geqslant 0,955 \times 20 \Leftrightarrow 0,955T_n \geqslant 19,1$
$\Leftrightarrow\ 0,955T_n + 0,9\ \geqslant\ 19,1 + 0,9\ \Leftrightarrow\ 0,955T_n + 0,9\ \geqslant\ 20$. Donc $T_{n+1}\ \geqslant\ 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = 0,955\ T_n + 0,9 - T_n = -0,045\ T_n + 0,9 = -0,045\left(T_n - \dfrac{0,9}{0,045}\right)$
$= -0,045(T_n - 20)$.

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \geqslant 20$ donc $T_n - 20 \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(c) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20$.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955\ T_n - 19,1 = 0,955\left(T_n - \dfrac{19,1}{0,955}\right)$
$= 0,955(T_n - 20) = 0,955\ u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$ car $0,955 \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20$.

(d) $T_n \leqslant 120 \Leftrightarrow 160 \times 0,955^n + 20 \leqslant 120 \Leftrightarrow 160 \times 0,955^n \leqslant 120 - 20 \Leftrightarrow 160 \times 0,955^n \leqslant 100$
$\Leftrightarrow 0,955^n \leqslant \dfrac{100}{160} \Leftrightarrow 0,955^n \leqslant \dfrac{5}{8}$.

Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on obtient :

$\ln(0,955^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0,955) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{8}\right)$. Or $\ln(0,955) < 0$ donc,

$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}$. À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\dfrac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21$ donc $n \geqslant 11$.

3. (a) Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

(b) La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leqslant x$.

temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leqslant 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

Exercice 2 **Thèmes : géométrie dans l'espace**

1. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ont pour coordonnées : $\overrightarrow{JK}(-1, 2, 0)$ $\quad\overrightarrow{JL}(-4, -2, -3)$.

Le produit scalaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$: $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

(b) $\mathcal{A}_{JKL} = \dfrac{JK \times JL}{2}$.

$JK = \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ et $JL = \left\|\overrightarrow{JL}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$.

Donc $\mathcal{A}_{JKL} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2} = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ cm².

(c) Le triangle JKL est rectangle en J donc en appliquant la formule de la tangente, on obtient :

$\tan\left(\widehat{\text{JKL}}\right) = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$.

Donc $\widehat{\text{JKL}} = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}\right) \approx 67,5°$

2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{JK} = k \times \overrightarrow{JL}$.

En effet le système $\begin{cases} -1 &= k \times (-4) \\ 2 &= k \times (-2) \\ 0 &= k \times (-3) \end{cases}$ n'admet pas de solution.

$\left(\overrightarrow{JK}\ ,\ \overrightarrow{JL}\right)$ est donc une base du plan (JKL).

Calculons :

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times 2 + (-10) \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$. C'est donc un vecteur normal au plan (JKL).

(b) Le plan (JKL) a pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$, on obtient : (JKL) : $6x + 3y - 10z + d = 0$.

Or $J \in$ (JKL) donc $12 + 0 - 10 + d = 0$ donc $d = -2$. Donc (JKL) a pour équation

$6x + 3y - 10z - 2 = 0$.

3. (a) La droite Δ est normale au plan (JKL) donc admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, normal à (JKL). elle passe par T$(10\ ;\ 9\ ;\ -6)$ donc une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 10 + 6t \\ y &= 9 + 3t \\ z &= -6 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(b) Le projeté orthogonal H de T sur le plan (IJK) est l'unique point d'intersection de Δ et (IJK). Ses coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \\ 6x + 3y - 10z - 2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x, y et z dans la dernière équation, on obtient :

$6(10 + 6t) + 3(9 + 3t) - 10(-6 - 10t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 145t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Donc $x = 10 + 6 \times (-1) = 4$, $y = 9 + 3 \times (-1) = 6$ et $z = -6 - 10 \times (-1) = 4$

H a pour coordonnées $(4\ ;\ 6\ ;\ 4)$

(c) $\mathcal{V}_{JKLT} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$. La base est le triangle JKL et la hauteur est le segment $[TH]$. D'après les question précédentes :

$\overrightarrow{TH}(-6, -3, 10)$ donc $TH = \| \text{Vect}\, TH \| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{145}$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{JKLT} = \frac{1}{3}\mathcal{B}_{JKL} \times TH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6} \text{ cm}^3.$$

Exercice 3 **Thèmes : fonction exponentielle**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{1 + e^x}{1 + e^x} - \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x} = \dfrac{2e^x}{1 + e^x} = \dfrac{2e^x}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$

$\boxed{\textbf{Affirmation 1 : Vraie}}$

2. $g(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\boxed{\textbf{Affirmation 2 : Vraie}}$

3. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = \left(2x - x^2\right) e^{-x}$.

L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}$, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}$, $e^{-a} \neq 0$,

$f(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 e^{-a} = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow (2a - a^2)e^{-a} = 0 \Leftrightarrow 2a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a(2 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 2$.

Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$.

$\boxed{\textbf{Affirmation 3 : Vraie}}$

4. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x \times \left(1 - x^2\right) + e^x \times -2x = e^x \left(1 - x^2 - 2x\right) = \left(-x^2 - 2x + 1\right) e^x$.

La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = (-2x - 2)e^x + e^x \times \left(-x^2 - 2x + 1\right) = e^x \left(-2x - 2 - x^2 - 2x + 1\right) = \left(-x^2 - 4x - 1\right) e^x$

Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $e^x > 0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

$\boxed{\textbf{Affirmation 4 : Fausse}}$

5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + x} = \dfrac{e^x}{e^x\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{e^x}}$.

   D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 1$

   $\boxed{\textbf{Affirmation 5 : Fausse}}$

6. $1 + e^{2x} \geqslant 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geqslant 0$.

   Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x. $\boxed{\textbf{Affirmation 6 : Vraie}}$

Exercice 4 **Thèmes : fonctions, fonction exponentielle**

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.

   $\forall x \in [-3\ ;\ 4],\ p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

   Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4],\ p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.
2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

   La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.
4. La fonction p est strictement croissante et s'annule en α, on peut donc établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$ ...

Partie B

1. (a) La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ (car $\forall x \in [-3\ ;\ 4], 1+x^2 \neq 0$).

   $\forall x \in [-3\ ;\ 4],\ f'(x) = \dfrac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\ e^x}{(1+^2)^2}$.

   (b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2\ e^x}{(1+^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ e^x \Leftrightarrow (x-1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   Et $f(1) = \dfrac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{e}{2}$.

2. (a) Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :
   — convexe sur $[-3\ ;\ 0]$;
   — concave sur $[0\ ;\ 1]$;
   — convexe sur $[1\ ;\ 4]$.
   Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

   Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

   (b) $\forall x \in [-3\ ;\ 4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1 + x^2)^3}$

   Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\ ;\ 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

   $\forall x \in [-3\ ;\ 4],\ \left(1 + x^2\right)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

   La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice 5 **Thème : Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ; Suites**

Partie A

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue en 0 et $e^{-0} = 1$. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$
2. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\ ;\ 1]$.

   $\forall x \in]0\ ;\ 1],\ f'(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-xe^{-x} + 1}{x} = \dfrac{1 - xe^{-x}}{x}$
3. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue, dérivable de dérivée $x \mapsto -e^{-x}$. Or $\forall x \in]0\ ;\ 1]$, $-e^{-x} < 0$. donc la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ 1]$.

   Donc $\forall x \in]0\ ;\ 1],\ :\ e^{-1} \leqslant e^{-x} < e^0 < 1$ donc $0 < e^{-x} < e^0 < 1$. De plus $0 < x \leqslant 1$ donc $0 < xe^{-x} < 1$.

   Cela signifie que $\forall x \in]0\ ;\ 1],\ 1 - xe^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0\ ;\ 1]$. $f(1) = e^{-1} + \ln(1) = e^{-1}$.
4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ 1]$ à valeurs dans $]-\infty\ ;\ e^{-1}]$. Or $0 \in]-\infty\ ;\ e^{-1}]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée ℓ, dans $]0\ ;\ 1]$.

   À la calculatrice : $\ell \approx 0,567$.

Partie B

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lll} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lll} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$

1. (a) $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} \approx 0,37$ et $b_1 = e^{a_0} = e^{-\frac{1}{10}} \approx 0,90$.

(b) Pour utiliser en Python la fonction exponentielle, il faut charger en premier la fonction *exp()* de la librairie "math" : *from math import exp.*

```
from math import exp
def termes(n) :
  a = 1/10
  b = 1
  for k in range(0, n) :
    c = exp(-b)
    b = exp(-a)
    a = c
  return(a, b)
```

2. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

Initialisation : $a_0 = \dfrac{1}{10}$ $a_1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ $b_0 = 1 = e^0$ $b_1 = e^{-\frac{1}{10}}$.

La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $-1 \leqslant -\dfrac{1}{10} \leqslant 0$ donc , $e^{-1} \leqslant e^{-\frac{1}{10}} \leqslant e^0$ et $\dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{10}$ donc on peut alors affirmer que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$.

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

Montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$.

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc

$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1 \Leftrightarrow e^{-0} > e^{-a_n} \geqslant e^{-a_{n+1}} \geqslant e^{-b_{n+1}} \geqslant e^{-b_n} \geqslant e^{-1}$

soit $0 < e^{-1} \leqslant e^{-b_n} \leqslant e^{-b_{n+1}} \leqslant e^{-a_{n+1}} \leqslant e^{-a_n} < 1 \leqslant 1$ donc

$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1$. On obtient ce qu'il fallait démontrer.

L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

(b) Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$ et que $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$.

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (a_n) converge.

De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (b_n) converge.

3. (a) $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

$A = \mathrm{e}^{-B} \Leftrightarrow \ln(A) = -B = -e^{-A}$ donc $\ln(A) + e^{-A} = 0$ donc $f(A) = 0$.

(b) De même $B = e^{-A} \Leftrightarrow \ln(B) = -A = -e^B$ donc $\ln(B) + e^{-B} = 0$ donc $f(B) = 0$.

Donc A et B sont deux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or d'après la question A.4, cette équation admet une unique solution, donc $A = B$ et $A - B = 0$.