Devoir Surveillé 01

Début Septembre 2025

3h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

$$T_0 = 180 \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

$$J(2\ ;\ 0\ ;\ 1), \quad K(1\ ;\ 2\ ;\ 1) \text{ et } \quad L(-2\ ;\ -2\ ;\ -2)$$

1. (a) Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2.
   (c) Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{\text{JKL}}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur Vect n de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10\ ;\ 9\ ;\ -6)$.

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.
   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).
   (c) On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h \text{ où } \mathcal{B} \text{ désigne l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur correspondante}$$

Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3.

Exercice 3
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x : $1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.
2. On considère la fonction$g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - x^2\right)$.

   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5. **Affirmation 5 :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = 0$.
6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x, $1 + \mathrm{e}^{2x} \geqslant 2\mathrm{e}^x$.

Exercice 4
Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.
   (a) Vérifier que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:
   $$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$
   où p est la fonction définie dans la partie A.
   (b) En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 5
Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & \dfrac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$
   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$
   (b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.
   (a) Démontrer que $f(A) = 0$.
   (b) Déterminer $A - B$.