

# Devoir Maison 19

Pour le 19 avril 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et  $I$  la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$ .

### Partie A : Etude de la matrice $A$

1. Calculer les matrices  $(A - I)^2$  et  $(A - I)^3$ .
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ?

### Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$ .

1. Justifier que la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -1, 1[$ , et déterminer les valeurs de  $\varphi'(0)$  et  $\varphi''(0)$ .
2. En utilisant la formule de Taylor-Young pour  $\varphi$  en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel  $\alpha$  non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3. On note  $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$  la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer  $(P(x))^2$ .
4. Soit  $C = A - I$ . En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que  $(P(C))^2 = A$ .  
Expliciter alors une matrice  $M$  telle que  $M^2 = A$ .

### Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $A$ .

Dans cette partie, on pose :  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  les vecteurs définis par : 
$$\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$$

(a) Calculer les vecteurs  $v$  et  $u$ .

(b) Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (c) Déterminer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
- (d) En déduire qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible telle que  $T = P^{-1}AP$ .
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- (a) Montrer que si  $N^2 = T$ , alors  $NT = TN$ . En déduire alors que  $N$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels.

- (b) Démontrer alors que l'équation matricielle  $N^2 = T$  admet exactement deux solutions :  $N_1$  et  $N_2$ .
3. Montrer que l'équation matricielle  $M^2 = A$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de  $P, P^{-1}, N_1$  et  $N_2$ .
4. L'ensemble  $E$  des matrices  $M$  appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$  est-il un espace vectoriel ?