Devoir Maison 20 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie A : Etude de la matrice A

1. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Puisque $(A-I)^3$ est la matrice nulle, on a $A^3 - 3A^2 + 3A = I$ autrement dit $A(A^2 - 3A + 3I)A = I$ d'où A inversible.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

1. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de :
   — la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$
   — et de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
   Il est important de noter que $1+x$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré (ouvert en -1) car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ (ni mÃªme dérivable) en 0.

   On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
   Pour tout $x \in]-1,1[$:

   $$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

   et donc : $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \varphi''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

2. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :

   $$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon \longrightarrow_0 0$$

   Le réel α recherché vaut donc $-\dfrac{1}{8}$.

3. En développant selon « $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ », on a :

   $$\begin{aligned}
   \big(P(x)\big)^2 &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)^2 \\
   &= 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{8}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} \times \left(-\frac{x^2}{8}\right)\right) \\
   &= 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} \\
   &= 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}
   \end{aligned}$$

4. On obtient donc : $\big(P(C)\big)^2 = P^2(C) = I + C - \dfrac{1}{8}C^3 + \dfrac{1}{64}C^4 = I + C = A$

   (d'après 1., $C^3 = 0$ et donc aussi $C^4 = 0$).

   La matrice $M = P(C)$ vérifie donc bien $M^2 = A$, et :

   $$\begin{aligned}
   M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\
   &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
   &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.
   \end{aligned}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

1. (a) En notant U, V et W les vecteurs-colonnes correspondant respectivement à u, v et w, les relations $v = f(w) - w$ et $u = f(v) - v$ se traduisent ainsi :

   $$V = AW - W = CW = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   $$U = AV - V = CV = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et on a donc : $v = (1,1,-3)$ et $u = (-6,-6,0)$.

(b) Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, montrer que la famille de trois vecteurs (u,v,w) est une base revient à prouver qu'elle est génératrice, c'est-à-dire que son rang vaut 3 :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(U|V|W) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\-6&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix} =_{L_2\leftarrow L_2-L_1} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\0&0&-1\\0&-3&1\end{pmatrix}\\ &=_{L_2\leftrightarrow L_3} \underbrace{\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\0&-3&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{\text{(matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls)}} = 3\end{aligned}$$

(c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A : $AU = \begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&2\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$

donc $f(u) = u$

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u, v et w : $f(v) = u + v \quad ; \quad f(w) = v + w$.

On en déduit la matrice de f dans la base (u,v,w) :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = T$$

(d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc inversible), on a : $P^{-1}AP = T$.

2. (a) Supposons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN.$$

En posant $N = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}a&a+b&b+c\\d&d+e&e+f\\g&g+h&h+i\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{pmatrix}}$$

ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&a+d\\a+b&=&b+e\\b+c&=&c+f\\d&=&d+g\\d+e&=&e+h\\e+f&=&f+i\\g+h&=&h\\h+i&=&i\end{array}\right. \ \underline{\text{ssi}}\ \left\{\begin{array}{rcl}d&=&0\\a&=&e\\b&=&f\\g&=&0\\d&=&h\\e&=&i\\g&=&0\\h&=&0\end{array}\right. \ \underline{\text{ssi}}\ \left\{\begin{array}{l}a=e=i\\d=g=h=0\\b=f\end{array}\right.$$

Par conséquent, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&c\end{pmatrix}$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(b) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2+2ac\\0&a^2&2ab\\0&0&a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a^2&=&1\\2ab&=&1\\b^2+2ac&=&0\end{array}\right. \ \underline{\text{ssi}}\ \left\{\begin{array}{rcl}a&=&1\\b&=&\frac{1}{2}\\c&=&-\frac{1}{8}\end{array}\right. \ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{rcl}a&=&-1\\b&=&-\frac{1}{2}\\c&=&\frac{1}{8}\end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions possibles :

$$N_1 = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

et on vérifie qu'il s'agit effectivement de solutions à l'équation (${N_1}^2 = {N_2}^2 = T$).

3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$M^2 = A \ \underline{\text{ssi}}\ \left(PNP^{-1}\right)^2 = A \ \underline{\text{ssi}}\ PN^2P^{-1} = A \ \underline{\text{ssi}}\ N^2 = P^{-1}AP \ \underline{\text{ssi}}\ N^2 = T$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions :

$$M_1 = PN_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = PN_2P^{-1}\ (= -M_1).$$

4. La matrice nulle n'étant pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.