

Devoir Maison 19

Pour le 15 avril 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. (a) Donner un développement limité de $\operatorname{ch} x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
(b) Montrer qu'un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est donné par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

- (c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f le prolongement ainsi obtenu.
- (d) Donner l'équation de la tangente \mathcal{T}_0 à \mathcal{C} ainsi que la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{T}_0 au voisinage de 0.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier que f est dérivable sur D et démontrer que pour tout réel x appartenant à D , $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\varphi(x)$ où φ est une fonction qu'on précisera.
(b) Etudier les variations de φ sur D . En déduire le signe de φ .
(c) En déduire les variations de f sur D . f est-elle dérivable en 0?
(d) Dresser le tableau de variation de f .
(e) Donner l'allure de la courbe.