Devoir Maison 19 - Eléments de Correction

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\operatorname{ch} x)}$$

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $\operatorname{ch} x > 0$ et $x \neq 0$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 > 0$ donc le domaine de définition D de f est $\boxed{D = \mathbb{R}^*}$.

2. (a) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x - 1 = 0$ alors en écrivant $\ln \operatorname{ch} x = \ln(1 + \operatorname{ch} x - 1)$ on peut utiliser le théorème de composition de développement limité en utilisant $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$ où on remplace X par la partie régulière du développement limité de $\operatorname{ch} x - 1$:
   ainsi $\ln(\operatorname{ch} x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ d'où $\frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = \frac{x}{2} + o(x^2)$
   il vient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = 0$
   on peut donc à nouveau utiliser le théorème de composition de développement limité en remplaçant X par la partie régulière du développement limité de $\frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x$ dans celui de e^X
   $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ donc $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$
   Conclusion : $\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$

   (c) On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$.
   On appelera ensuite encore f le prolongement ainsi obtenu.

   (d) La tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}$ a pour équation : $\boxed{y = 1 + \frac{1}{2}x}$
   Au voisinage de 0, $\frac{1}{8}x^2 > 0$ donc $\underline{\mathcal{C} \text{ est au -dessus de } \mathcal{T}_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

3. $\ln\operatorname{ch} x = \ln\frac{e^x(1+e^{-2x})}{2} = x + \ln\frac{1+e^{-2x}}{2}$ donc $\frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{x}\ln\frac{1+e^{-2x}}{2}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+e^{-2x}}{2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} e^X = e$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e}$
   $\ln\operatorname{ch} x = \ln\frac{e^{-x}(1+e^{2x})}{2} = -x + \ln\frac{1+e^{2x}}{2}$ donc $\frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = -1 + \frac{1}{x}\ln\frac{1+e^{2x}}{2}$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+e^{2x}}{2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x = -1$ et $\lim\limits_{X\to -1} e^X = \dfrac{1}{e}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}}$

4. (a) La fonction $x \mapsto \ln\operatorname{ch} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur D en tant que logarithme d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln\operatorname{ch} x$ est dérivable sur D en tant que produit de fonctions dérivables sur D.
   ALors f est dérivable sur D en tant qu'exponentielle d'une fonction dérivable sur D.
   $\forall x \in D, f'(x) = f(x)\frac{x\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \ln\operatorname{ch} x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}(x\tanh x - \ln\operatorname{ch} x)$
   donc pour tout réel x appartenant à D, $\boxed{f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\varphi(x)}$ où φ est la fonction définie par
   $\varphi(x) = x\tanh x - \ln\operatorname{ch} x$.

   (b) φ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \tanh x + x(1-\tanh^2 x) - \tanh x = x(1-\tanh^2 x)$
   or $\forall x \in D, -1 < \tanh x < 1$ donc $1 - \tanh x > 0$ ainsi $\varphi'(x)$ est du signe de x.
   On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$
   Or $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ d'où : $\boxed{\forall x \in D, \varphi(x) > 0}$

   (c) $\forall x \in D, \frac{f(x)}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$ qui est strictement positif.
   f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[\ ]0;+\infty[$.
   D'après le développement limité , la fonction f prolongée par continuité est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

(d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e