Devoir Maison 19

Pour le vendredi 12 juin 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Le corrigé est disponible. A faire en préparation du DS 11.

Exercice 1

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

Partie A. Un premier cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

1. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,. \qquad (E)$$

   (a) Calculer $f(0)$.

   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

   (c) En déduire la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

Partie B. Un second cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

1. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

   (a) Calculer $f(0)$.

   (b) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

(c) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et e^x. Calculer $f'(0)$.

(d) Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, $f'(x)$ et e^x.

(e) Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

(f) En déduire la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

Partie C. Résolution de l'équation homogène

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle.
On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **Calcul des dérivées successives de f**

(a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

(b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

(c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

(d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Soit A un nombre réel strictement positif.

(a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que $\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f(x)| \leq M$ et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(b) Soit x un nombre réel appartenant à $[-A;A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $|f(x)| \leq M\dfrac{A^{n+1}}{(n+1)!}$ et en déduire que $f(x) = 0$.

4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Partie D.Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$
2. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

Exercice 2
Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :
X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n,x)$ avec $x \in]0,1[$).
Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n,y)$ avec $y \in]0,1[$).
On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité : $Z = 2n - X - Y$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z.
   (b) Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :
$$P(Z=0) \quad ; \quad P(Z=2n) \quad ; \quad P(Z=2n-1) \quad ; \quad P(Z=1)$$
2. (a) Donner les espérances et variances suivantes : $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.
   (b) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.
   Montrer que l'espérance de W est donnée par : $E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.
3. On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :
$$f(x,y) = xy(2-x-y) \text{ pour tout couple } (x,y) \text{ de } D$$
   (a) Justifier que f est de classe C^1 sur D.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, en déduire le seul point (x_0, y_0) de D (appelé " point critique ") susceptible de réaliser un extremum local pour f.
   (c) Montrer que pour tout couple (x,y) de D :
$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$
   En déduire qu'en ce point critique, f admet un maximum global sur D.
4. On suppose que les variables X, Y définies plus haut représentent, en centimètres, la largeur et la longueur d'une brique, dont la hauteur Z est telle que la somme des côtés, $X+Y+Z$, est toujours égale à 56 cm, et de volume XYZ.
   (a) Quelles sont les valeurs que l'on doit donner aux paramètres x et y pour que le volume moyen de la brique soit maximal ?
   (b) Montrer que ce volume moyen maximum est de 6272 cm^3.