

Devoir Maison 18

Pour le 8 avril 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Approximation de Padé de la fonction "th"

On se propose de déterminer des fractions rationnelles qui approchent la fonction th. On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f_0(x) = \operatorname{sh}(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt \end{cases}$$

1. Calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
2. Montrer avec une intégration par parties que

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^3 f_{n-2}(t) dt = x^2 f_{n-1}(x) - 2 f_n(x)$$

3. En déduire par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -(2n-1) f_{n-1}(x) + x^2 f_{n-2}(x)$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes P_n et Q_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = Q_n(x) \operatorname{sh}(x) - P_n(x) \operatorname{ch}(x)$$

On précisera la relation de récurrence que vérifie Q_n .

5. Calculer P_n et Q_n pour $n = 3$ et $n = 4$.
6. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (-1)^n Q_n$.
 - (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = (2n-1) S_{n-1}(x) + x^2 S_{n-2}(x)$
 - (b) Calculer $S_n(0)$ en fonction de n .
 - (c) Montrer que S_n est un polynôme pair à coefficients dans \mathbb{N} .
 - (d) Quelle est la valeur minimale de S_n sur \mathbb{R} ?
7. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!} \operatorname{sh}(x)$$

8. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n)!}$$