Devoir Maison 18 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Des intégrations par parties (les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) donnent rapidement
$$\boxed{f_1(x) = x\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = -3\,x\ \mathrm{ch}(x) + (x^2+3)\ \mathrm{sh}(x)}$$

2. En remarquant que, pour $n \geqslant 2$, $\quad f'_{n-1}(t) = t\,f_{n-2}(t)$, $\quad$ nous pouvons écrire :
$$\int_0^x \underbrace{t^2}_{=u(t)}\ \underbrace{t\,f_{n-2}(t)}_{=f'_{n-1}(t)}\,dt = \left[t^2\,f_{n-1}(t)\right]_0^x - \int_0^x 2\,t\,f_{n-1}(t)\,dt \qquad (u, f_{n-1} \in \mathcal{C}^1)$$
soit enfin $\quad \boxed{\forall\ n \geqslant 2, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^3\,f_{n-2}(t)\,dt = x^2\,f_{n-1}(x) - 2f_n(x)}$

3. La question **-1-** amorce une récurrence puisque nous avons
$$f_2(x) = -3\,\big(x\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) + x^2\ \mathrm{sh}(x) = -3\,f_1(x) + x^2\,f_0(x)$$
Étudions l'hérédité : $\quad$ pour $n \geqslant 2$, si $f_n(x) = -(2n-1)\,f_{n-1}(x) + x^2\,f_{n-2}(x)$, alors :
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x t\,f_n(t)\,dt = -(2\,n-1)\int_0^x t\,f_{n-1}(t)\,dt + \int_0^x t^3\,f_{n-2}(t)\,dt \\ &= -(2\,n-1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) - 2f_n(x) \\ &= -(2\,n+1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) \qquad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

4. La question **-1-** confirme que, pour $n = 0, 1$ et 2, $f_n(x)$ est bien de la forme
$f_n(x) = \big(Q_n\,\mathrm{sh} - P_n\,\mathrm{ch}\big)\,(x)$. $\quad$ Confirmons ceci par récurrence : $\quad \forall\ n \geqslant 2$
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= -(2\,n+1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) \\ &= -(2\,n+1)\,\big(Q_n\,\mathrm{sh} - P_n\,\mathrm{ch}\big)\,(x) + x^2\,\big(Q_{n-1}\,\mathrm{sh} - P_{n-1}\,\mathrm{ch}\big)\,(x) \\ &= Q_{n+1}(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_{n+1}(x)\,\mathrm{ch}(x) \end{aligned}$$
où $\left\{\begin{array}{l} Q_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,Q_n(x) + x^2\,Q_{n-1}(x) \\ P_{n+1}(x) = -(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x) \end{array}\right.$ sont des polynômes.

Conclusion
$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, & f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_n(x)\,\mathrm{ch}(x) \\ & Q_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,Q_n(x) + x^2\,Q_{n-1}(x) \\ & P_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,P_n(x) + x^2\,P_{n-1}(x) \end{array}}$$

5. Nous avons déjà $f_1(x)$ et $f_2(x)$, $\quad$ donc Q_1, P_1, Q_2, P_2. $\quad$ Les formules précédentes fournissent les polynômes suivants :
$$\boxed{\begin{array}{cc} Q_1(x) = -1 & P_1(x) = -x \\ Q_2(x) = x^2+3 & P_2(x) = 3x \\ Q_3(x) = -6x^2 - 15 & P_3(x) = -x^3 - 15x \\ Q_4(x) = x^4 + 45x^2 + 105 & P_4(x) = 10x^3 + 105x \end{array}}$$

6. (a) En posant $S_n = (-1)^n Q_n$, la formule de récurrence devient
$$\forall\ n \geqslant 1, \quad S_{n+1}(x) = (2\,n+1)\,S_n(x) + x^2\,S_{n-1}(x),$$
soit encore $\quad \boxed{\forall\ n \geqslant 2, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = (2\,n-1)\,S_{n-1}(x) + x^2\,S_{n-2}(x)}$

(b) Ce résultat est valable pour $x = 0$.
La suite $\big(S_n(0)\big)$ vérifie : $\quad \forall\ n \geqslant 2, \quad S_n(0) = (2\,n-1)\,S_{n-1}(0)$
$$S_1(0) = -Q_1(0) = 1$$
$$S_2(0) = 3\ S_1(0) = 3 \times 1$$
$$S_3(0) = 5\ S_2(0) = 5 \times 3 \times 1$$
Une récurrence évidente donne $\quad \boxed{S_n(0) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}}$

(c) S_1, S_2, S_3, S_4 sont des polynômes pairs à coefficients entiers naturels.
La formule de récurrence du **-6-b-** montre que cette propriété est héréditaire.
Conclusion $\quad \boxed{S_n \text{ est un polynôme pair à coefficients dans } \mathbb{N}}$

(d) S_n étant pair à coefficients positifs, il est clair que le minimum de $S_n(x)$ est obtenu pour $x = 0$. $\quad \boxed{\text{Le minimum de } S_n \text{ est } S_n(0) = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}}$

7. La fonction $f_0 = \mathrm{sh}$ est croissante donc : $\quad \forall\ x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f_0(x) \leqslant \frac{x^0}{2^0\,0!}\ \mathrm{sh}(x)$.
Confirmons cet encadrement par récurrence : si $\quad \forall\ x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(x)$
alors $\quad \forall\ t \in [0, x], \quad 0 \leqslant t\,f_n(t) \leqslant \frac{t^{2n+1}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(t) \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\,t^{2n+1}$
en intégrant entre 0 et x (avec $0 \leqslant x$), il vient :
$$0 \leqslant f_{n+1}(x)\,dt \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\int_0^x t^{2n+1}\ \mathrm{sh}(t)\,dt = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\ \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^x$$
ce qui confirme l'hérédité. $\quad \boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall\ x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(x)}$

8. Il est clair que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction impaire (c'est vrai pour f_0, f_1, f_2 et l'hérédité est immédiate). le résultat précédent s'écrit $\underline{\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n\,n!}\ \big|\mathrm{sh}(x)\big|}$. Comme $f_n(x) = Q_n(x)\ \mathrm{ch}(x)\ \Big(\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big)$,
et $\quad \frac{(2n)!}{2^n\,n!} \leqslant \big|S_n(x)\big| = \big|Q_n(x)\big|$,
il vient $\quad \frac{(2n)!}{2^n\,n!}\,\big|\mathrm{ch}(x)\big|\,\Big|\mathrm{sh}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big| \leqslant \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n\,n!}\ \big|\mathrm{sh}(x)\big|$

d'où $\left|\text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{\left|x\right|^{2n}}{(2n)!} \left|\text{th}(x)\right|$.

La concavité de la fonction " th " montre que $\left|\text{th}(x)\right| \leqslant \left|x\right|$.

Conclusion $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \left|\text{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{\left|x\right|^{2n+1}}{(2n)!}}$