Devoir Maison 18

Pour le vendredi 29 Mai 2026

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1
PARTIE I
On considère la fonction réelle Φ définie par

$$\Phi(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \frac{b\,x}{1+x^2} + c\,x\ln\left(1+x^2\right)$$

où b et c sont deux réels donnés.

1. (a) Utiliser un développement limité de la dérivée $\operatorname{Arctan}'(x)$ pour donner le développement limité d'ordre 5 de $\operatorname{Arctan}(x)$ au voisinage de 0.
   (b) **Optionnnel** On se propose de confirmer ce résultat en utilisant une autre méthode.
   — Former le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction tangente.
   — Utiliser la technique des coefficients indéterminés pour en déduire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction réciproque Arctan .
2. Donner le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\Phi(x)$.
3. **Optionnnel** Déterminer b et c pour que, au voisinage de 0, $\Phi(x)$ soit équivalent à $a\,x^{\alpha}$ où α est le plus grand possible (on dit que $\Phi(x)$ soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible par rapport à l'infiniment petit principal x). Préciser cet équivalent.

PARTIE II

g désigne la fonction définie par

$$g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

4. Montrer qu'on peut limiter l'étude de g à $\mathbb{R}_+^*$.
   Faire alors cette étude et tracer la représentation graphique (Γ) dans un repère orthonormé (on précisera les points d'inflexion[1] et on prendra 5cm pour unité).
5. On pose $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^3}\,g(x)$.
   (a) Déduire du $DL_5(0)$ de g, que f admet un $DL_2(0)$ que l'on précisera.
   En conclure que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
   f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quel est le nombre dérivé en 0 ?
   (b) Montrer que, sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de f peut se mettre sous la forme

$$f\,'(x) = \frac{x^2+3}{x^4}\;h(x)$$

   où h est une fonction que l'on précisera.

1. Il y a point d'inflexion quand la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

(c) Étudier les variations de h et en déduire le signe de $f\,'$.

Dresser le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère adapté.

PARTIE III **Optionnnel**

Plus généralement, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f_α par

$$f_\alpha(x) = \frac{1+x^2}{x^\alpha}\, g(x), \qquad \text{où } \alpha \text{ est un réel quelconque.}$$

1. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α admet-elle une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives ? Précisez cette limite (en fonction de α)

On suppose désormais que $\alpha \geqslant 2$.

2. (a) Calculer la dérivée $f_\alpha'(x)$. Montrer que l'on peut écrire $f_\alpha'(x) = \dfrac{\left(\alpha-2\right)x^2+\alpha}{x^{\alpha+1}}\, h_\alpha(x)$ où h_α est une fonction que l'on précisera.

(b) Grâce à l'étude de h_α, étudier le signe de f_α' puis les variations de f_α.

Dans chacun des différents cas possibles, dresser le tableau des variations de f_α

(c) On note $\left(\mathcal{C}_\alpha\right)$ la courbe représentative de f_α. Étudier les positions relatives des courbes $\left(\mathcal{C}_\alpha\right)$ (positions globales et non locales).

(d) Tracer dans un même repère les courbes $\left(\mathcal{C}_\alpha\right)$ pour $\alpha \in \left\{2, \dfrac{3}{2}, 3, 4\right\}$