Devoir Maison 17

Pour le 25 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x, 2x+3y-2z, 4x+4y-3z)$$

1. Démontrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer Ker f , Im f. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer fof.En déduire la nature de f.
4. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\ dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2).$

   (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
   (c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.