Devoir Maison 17 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. $\forall \vec{u} = (x,y,z) \in E, \forall \vec{v} = (x',y',z') \in E, \forall(\lambda,\mu) \in R^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) &= f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') \\ &= (\lambda x+\mu x', 2\lambda x+2\mu x'+3\lambda y+3\mu y'-2\lambda z-2\mu z', \\ &\quad 4\lambda x+4\mu x'+4\lambda y+4\mu y'-3\lambda z-3\mu z') \\ &= \lambda(x, 2x+3y-2z, 4x+4y-3z)+\mu(x', 2x'+3y'-2z', 4x'+4y'-3z') \\ &= \lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v}) \end{aligned}$$

.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$.

De plus $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \in L(\mathbb{R}^3)}$

2. $\vec{u} = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 4x+4y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3y-2z=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}}$

$\operatorname{Im} f = \{(x, 2x+3y-2z, 4x+4y-3z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$,

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,2,4),(0,3,4),(0,-2,-3))$ et la famille $((1,2,4),(0,3,4),(0,-2,-3))$ est libre car

$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1(1,2,4)+\lambda_2(0,3,4)+\lambda_3(0,-2,-3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2-2\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1+4\lambda_2-3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

alors on peut écrire $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,2,4),(0,3,4),(0,-2,-3)) = \mathbb{R}^3}$

3. Puisque le noyau de f est réduit au vecteur nul, on en déduit que f est injective. Puisque $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ on en déduit que f est surjective. Conclusion : $\underline{f \text{ est bijective}}$.

4.
$$\begin{aligned} \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f \circ f(x,y,z) &= (x, 2x+3(2x+3y-4z)y-2(4x+4y-3z), \\ &\quad 4x+4(2x+3y-2z)-3(4x+4y-3z)) \\ &= (x,y,z) \end{aligned}$$

$f \circ f = Id_E$ et $f \in \mathrm{L}(E)$ alors f est une symétrie.

5. $u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f - Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2x+3y-2z = y \\ 4x+4y-3z = z \end{cases} \Leftrightarrow x+y-z = 0$

donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f-Id_E) = \{(x,y,x+y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))}$

Sachant que la famille $((1,0,1),(0,1,1))$ est libre elle forme donc une base de $\operatorname{Ker}(f-Id_E)$.

$u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f + Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x \\ 2x+3y-2z = -y \\ 4x+4y-3z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y-z = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f+Id_E) = \{(0,y,2y), y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((0,1,2))}$

Sachant que la famille $((0,1,2))$ est libre elle forme donc une base de $\operatorname{Ker}(f+Id_E)$.

$\underline{f \text{ est une symétrie par rapport à } \operatorname{Ker}(f-Id_E) = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1)) \text{ suivant la direction } \operatorname{Ker}(f+Id_E)f = \operatorname{Vect}((0,1,2))}$

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi(P))(x) = \displaystyle\int_0^1 P(x+t)dt$

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.

$\varphi(\alpha P+Q)(x) = \displaystyle\int_0^1 (\alpha P+Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t)+Q(x+t))dt = \alpha\int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$

On a donc bien , $\varphi(\alpha P+Q) = \alpha\varphi(P)+\varphi(Q)$ et $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(b) $\varphi(e_0)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$

$\varphi(e_1)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt = \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x+\frac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 x^2+2xt+t^2dt = \left[x^2.t+x.t^2+\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2+x+\frac{1}{3}$

Par conséquent : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0,\ \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0+e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0+e_1+e_2\ .}$

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynÃ´me de E.
La linéarité de φ montre que $\varphi(P) = \alpha\varphi(e_0) + \beta\varphi(e_1) + \gamma\varphi(e_2)$.
Or ,comme on l'a vu au (b) :$\varphi(e_0) = e_0 \in E$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \in E$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2 \in E$ et E est stable par combinaison linéaire , donc $\boxed{\varphi(P) \in E.}$

φ est linéaire et à valeurs dans E, donc <u>φ est un endomorphisme de E.</u>

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls , elle est donc inversible et φ est bijectif . <u>φ est un automorphisme de E.</u> (endomorphisme bijectif de E).

3. Les commandes `Scilab` suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrer une valeur pour n:')
A=[1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4. (a) Démontrons la propriété $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence :

- <u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$.

  Un peu de rab : Pour $n = 1$, on a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_1 = \frac{1}{3}$.

- <u>hérédité :</u> En supposant $P(n)$ vraie, calculons $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  On obtient alors , $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.
- <u>conclusion :</u> Pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

  avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$,on a $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
Or $(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{6}(3k+2)$,

donc $u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{6}(3k+2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1}(3k) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n-1} 1.$

Et pour finir : $u_n = \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{3} = n\left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{4}\right) = \frac{n(3n+1)}{12}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$