

Devoir Maison 17 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie 0 : étude d'un premier exemple dans \mathbb{R} .

1. On prend ici $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$. Soit $a \in]0, 1[$, comme $0 < a < 1$, on a $h = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}\right) > 0$. Ainsi $a + h \leq a + \frac{1-a}{2} = \frac{1+a}{2} < 1$ car $a < 1$. Et $a - h \geq a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$.

Donc $0 < a - h < a < a + h < 1$ et $\frac{1}{2}(a - h + a + h) = a$ avec $a - h \neq a$. Finalement a n'est pas un point extrémal de $]0, 1[$.

2. On considère maintenant $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$. La question précédente montre avec de mineures adaptations qu'aucun point de $]0, 1[$ n'est extrémal de $[0, 1]$.

Montrons que 0 est extrémal de A . Supposons qu'il existe x, y dans $[0, 1]$ tel que $\frac{1}{2}(x + y) = 0$. Or une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls donc ici $x = y = 0$. Ainsi 0 est extrémal de A .

Montrons que 1 est extrémal de A . Supposons qu'il existe x, y dans $[0, 1]$ tel que $\frac{1}{2}(x + y) = 1$. Si $x < 1$ alors $x + y < 2$ car $y \leq 1$. C'est absurde donc $x = 1$ et $y = 2 - x = 1$. Ainsi 1 est extrémal de A .

Partie 1 : étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble $\left\{ M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \alpha \in [0, 1] \right\}$

et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

3. (a) On a

$$\begin{aligned} A_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \alpha \in [0, 1] \right\} \\ &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 1] \right\} \\ &= \{ \alpha I_2 + (1-\alpha)J, \alpha \in [0, 1] \} \end{aligned}$$

On voit alors que A_2 est un paramétrage du segment d'extrémités I_2 et J dans $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A_2$. Par calcul simple, on voit que

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)I_2 + \left(1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)J.$$

Comme $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$, on a $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \in [0, 1]$ ainsi $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = M_{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \in A_2$.

(c) Soit $\alpha \in [0, 1]$, $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\alpha^2 - (1-\alpha)^2 \neq 0$ si et seulement si $2\alpha - 1 \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Si c'est le cas alors

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2\alpha - 1} & 1 - \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \\ 1 - \frac{\alpha}{2\alpha - 1} & \frac{\alpha}{2\alpha - 1} \end{pmatrix}$$

Voyons pour quelles valeurs de α , on a $\frac{\alpha}{2\alpha - 1} \in [0, 1]$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$ donc $0 < 2\alpha - 1 = \alpha + \underbrace{\alpha - 1}_{< 0} < \alpha$, on divise

par $2\alpha - 1 > 0$ et $1 < \frac{\alpha}{2\alpha - 1}$. Donc $M_\alpha^{-1} \notin A_2$.

Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors $2\alpha - 1 < 0$ donc $\frac{\alpha}{2\alpha - 1} < 0$ et $M_\alpha^{-1} \notin A_2$.

Si $\alpha = 0$, alors $M_0 = I_2$ inversible d'inverse $I_2 \in A_2$.

Si $\alpha = 1$, alors $M_1 = J$ inversible d'inverse $J \in A_2$.

Bilan : M_α est inversible avec $M_\alpha^{-1} \in A_2$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

4. Points extrémaux de A_2 .

(a) On peut remarquer que, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$M_\alpha = I_2 \iff \alpha = 1 \text{ et } 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = 1.$$

Par conséquent, pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a, en exploitant la question 2,

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = I_2 \iff M_{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = I_2$$

$$\iff \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 1 \underset{Q2}{\iff} \alpha = \beta = 1 \iff M_\alpha = M_\beta = I_2.$$

De même on peut remarquer que, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$M_\alpha = J \iff \alpha = 0 \text{ et } 1 - \alpha = 1 \iff \alpha = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a, en exploitant la question 2,

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = J \iff M_{\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = J$$

$$\iff \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 0 \underset{Q2}{\iff} \alpha = \beta = 0 \iff M_\alpha = M_\beta = J.$$

Bilan : I_2 et J sont des points extrémaux de A_2 .

(b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. On a $2\alpha \in]0, 1]$. Avec la question (3b), $\frac{1}{2} (M_{2\alpha} + J) = \frac{1}{2} (M_{2\alpha} + M_0) = M_{\frac{1}{2}(2\alpha+0)} = M_\alpha$.

Comme $\alpha \neq 0$, on a $J = M_0 \neq M$ donc M_α n'est pas extrémal.

(c) Soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors $2\alpha - 1 \in]0, 1[$ et $\frac{1}{2} (M_{2\alpha-1} + I_2) = \frac{1}{2} (M_{2\alpha-1} + M_1) = M_{\frac{1}{2}(2\alpha+0)} = M_\alpha$.

On a $\alpha \neq 1$, donc $I_2 \neq M_\alpha$.

Bilan : M_α n'est pas extrémal.

5. Réduction simultanée des matrices de A_2 .

(a) Vérification calculatoire :

Pour tout α de $[0, 1]$, $M_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et $M_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2\alpha - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) D'après les calculs précédents et par le principe de changement de base,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout α de $[0, 1]$,

$P^{-1}M_\alpha P = D_\alpha$ avec $D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}$.

(c) Soit α dans $]0, 1]$. On note u_α l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 représenté par la matrice M_α dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

On sait que u_α est un projecteur de \mathbb{R}^2 si et seulement si $u_\alpha \circ u_\alpha = u_\alpha$ si et seulement si $M_\alpha^2 = M_\alpha$.

On voit que $J^2 = J = J \times I_2 = I_2 \times I$ donc

$$\begin{aligned} M_\alpha^2 = M_\alpha &\iff (\alpha I_2 + (1 - \alpha)J)^2 = \alpha I_2 + (1 - \alpha)J \\ &\iff \alpha^2 I_2 + 2\alpha(1 - \alpha)J + (1 - \alpha)^2 J^2 = \alpha I_2 + (1 - \alpha)J \\ &\iff (\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2)I_2 + 2\alpha(1 - \alpha)J = \alpha I_2 + (1 - \alpha)J \\ &\iff (\alpha^2 + 1 - 3\alpha + \alpha^2)I_2 + (2\alpha - 1)(1 - \alpha)J = (0). \\ &\iff (-2\alpha + 1)(1 - \alpha)I_2 + (2\alpha - 1)(1 - \alpha)J = (0). \end{aligned}$$

Comme (I_2, J) est libre on a

$$M_\alpha^2 = M_\alpha \iff (2\alpha - 1)(1 - \alpha) = 0 \iff \alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a $u_\alpha = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ de noyau $\{(0, 0)\}$ et d'image \mathbb{R}^2 .

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $u_{\frac{1}{2}} : (a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ de noyau $\text{Vect}((1, -1))$ et d'image $\text{Vect}((1, 1))$.

Partie 2 : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien

6. A est non vide donc on peut choisir un u dans A et le nombre $\|u - u\|$ est dans l'ensemble $\{\|v - w\|, (v, w) \in A^2\}$ donc il est une partie non vide de \mathbb{R} .

Pour tout v, w dans A , $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq 2R$ par inégalité triangulaire donc l'ensemble $\{\|v - w\|, (v, w) \in A^2\}$ est majoré par $2R$.

7. On considère donc $(c, d) \in A^2$ tels que $\frac{c+d}{2} = a$.

(a) $\|a - b\| = \left\| \frac{c+d}{2} - b \right\| = \left\| \frac{c-b+d-b}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} (\|c - b\| + \|d - b\|)$ par inégalité triangulaire.

Par définition du diamètre, on peut dire que $\|c - b\| \leq \delta(A) = \|a - b\|$ et $\|d - b\| \leq \delta(A) = \|a - b\|$. On somme ces inégalités et on divise par 2 pour obtenir $\frac{1}{2} (\|c - b\| + \|d - b\|) \leq \|a - b\|$.

De sorte que, par double inégalité, $\|a - b\| = \frac{1}{2} (\|c - b\| + \|d - b\|)$.

Si $\delta(A) = \|a - b\| = 0$, alors A ne contient qu'un seul élément et il est extrémal dans A .

Si $\delta(A) = \|a - b\| > 0$, alors on peut diviser par $\|a - b\|$ ainsi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\|c - b\|}{\|a - b\|} + \frac{\|d - b\|}{\|a - b\|} \right) = 1.$$

Par définition $0 \leq \frac{\|c-b\|}{\|a-b\|} \leq 1$ et $0 \leq \frac{\|d-b\|}{\|a-b\|} \leq 1$, on sait que 1 est extrémal dans $[0, 1]$ donc $\frac{\|c-b\|}{\|a-b\|} = \frac{\|d-b\|}{\|a-b\|} = 1$.

Bilan : $\|c - b\| = \|d - b\| = \|a - b\| = \delta(A)$.

(b) On calcule

$$\begin{aligned} &\|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle c - a, a - b \rangle \\ &= \|c\|^2 - 2\langle c, a \rangle + \|a\|^2 + \|a\|^2 - 2\langle b, a \rangle + \|b\|^2 - 2\|a\|^2 + 2\langle c, a \rangle - 2\langle c, b \rangle + 2\langle a, b \rangle \\ &= \|c\|^2 - 2\langle c, b \rangle + \|b\|^2 \\ &= \|c - b\|^2. \end{aligned}$$

Comme $\|c - b\| = \|a - b\|$, on peut les retirer simultanément et $\|c - a\|^2 + 2\langle c - a, a - b \rangle = 0$ donc $\|c - a\|^2 = -2\langle c - a, a - b \rangle$.

(c) Les variables c et d jouent des rôles symétriques donc $\|d - a\|^2 = -2\langle d - a, a - b \rangle$.

(d) Comme $c + d = 2a$, on a $c - a = a - d$ donc $\|d - a\|^2 = \|c - a\|^2$ et

$$\langle d - a, a - b \rangle = \langle c - a, a - b \rangle$$

donc $\langle d - a, a - b \rangle - \langle c - a, a - b \rangle = 0$

donc $\langle d - a - (c - a), a - b \rangle = 0$ et $\langle d - c, a - b \rangle = 0$

Bilan : $c - d$ et $a - b$ sont orthogonaux.

(e) $c - d$ et $a - b$ sont orthogonaux donc $\frac{1}{2}(c - d)$ et $b - a$ sont orthogonaux. On peut appliquer le théorème de Pythagore et

$$\left\| \frac{1}{2}(c - d) \right\|^2 + \|b - a\|^2 = \left\| \frac{1}{2}(c - d) - a + b \right\|^2$$

$$= \left\| \frac{1}{2}(\underbrace{2a - d - d}_{=c}) - a + b \right\|^2 = \|a - d - a + b\|^2 = \|b - d\|^2 \leq \delta(A)^2$$

car b et d sont dans A .

D'autre part $\left\| \frac{1}{2}(c - d) \right\|^2 \geq 0$ donc $\delta(A)^2 \leq \left\| \frac{1}{2}(c - d) \right\|^2 + \delta(A)^2 = \left\| \frac{1}{2}(c - d) \right\|^2 + \|b - a\|^2 \leq \delta(A)^2$ donc $\left\| \frac{1}{2}(c - d) \right\|^2 = 0$ et $c = d$. On en déduit $a = c = d$.

Bilan : a est extrémal dans A .

Remarque : de façon intuitive, s'il existe $c - d$ orthogonal à $b - a$, alors on pourra trouver un vecteur v dans A tel que $\|b - v\| > \|b - a\| = \delta(A)$ ce qui est contradictoire avec la notion de diamètre. En ce sens a est un point sur le "bord" de A ce qui permet à $\|b - a\|$ d'être maximal.

Partie 3 : Etude de l'ensemble des matrices bistochastiques.

Pour alléger l'écriture, on pose, pour tout $M \in E, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_L(M, i) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$,

la somme des termes de la i^e ligne de M .

Et, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_C(M, j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j}$, la somme des termes de la i^e colonne de M .

Enfin on écrira $(M)_{i,j}$ pour désigner le coefficient en ligne i et colonne j de M .

8. Premières propriétés de A_n .

(a) Soit (M, M') dans A_n^2 . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_L(\frac{1}{2}(M + M'), i) = \frac{1}{2}s_L(M, i) + \frac{1}{2}s_L(M', i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_C(\frac{1}{2}(M + M'), j) = \frac{1}{2}s_C(M, j) + \frac{1}{2}s_C(M', j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

De plus $s_L({}^t M, i) = s_C(M, i) = 1$ et $s_C({}^t M, i) = s_L(M, i) = 1$.

Bilan : $\frac{1}{2}(M + M') \in A_n$ et ${}^t M \in A_n$.

(b) Soit $M \in A_n$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le produit $M.X_0$ est un vecteur colonne dont le i^e terme est $s_L(M, i)$ car on multiplie la i^e ligne de M par une colonne de 1. Donc $(M.X_0)_i$ vaut 1.

Bilan : $M.X_0 = X_0$.

(c) Réciproquement, soit M une matrice de E dont tous les coefficients sont positifs, et vérifiant :

$M.X_0 = X_0$ et ${}^t M.X_0 = X_0$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $s_L(M, i) = (M.X_0)_i = 1$ et

$s_C(M, i) = s_L({}^t M, i) = ({}^t M.X_0)_i = 1$.

Bilan : $M \in A_n$.

(d) Soit (M, M') dans A_n^2 . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (MM')_{i,j} = \sum_{k=1}^n (M)_{i,k}(M')_{k,j}$,

$$\text{donc } s_L(MM', i) = \sum_{j=1}^n (MM')_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (M)_{i,k}(M')_{k,j} =$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (M)_{i,k} \sum_{j=1}^n (M')_{k,j}}_{\text{inversion des } \Sigma \text{ possible car les indices sont indépendants avec un nombre fini de termes}}$$

inversion des Σ possible car les indices sont indépendants avec un nombre fini de termes

$$= \sum_{k=1}^n (M)_{i,k} \underbrace{s_L(M', k)}_{=1} = \sum_{k=1}^n (M)_{i,k} = 1.$$

$$\text{De même } s_C(MM', j) = \sum_{i=1}^n (MM')_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M)_{i,k}(M')_{k,j} =$$

$$\sum_{k=1}^n (M')_{k,j} \sum_{i=1}^n (M)_{i,k} = \sum_{k=1}^n (M')_{k,j} \underbrace{s_C(M, k)}_{=1} = \sum_{k=1}^n (M')_{k,j} = 1.$$

Bilan : $M.M' \in A_n$.

9. Endomorphismes et matrices de permutation.

On note S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est à dire l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui même. On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$.

Soit $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base canonique B_0 . On dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ .

- (a) Si σ est l'identité de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = e_j$ donc $f_\sigma = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ car f_σ et $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ coïncident sur une base de \mathbb{R}^n et $M_\sigma = I_n$.
- (b) Si σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ donc dans la j^e colonne de M_σ il y a $n - 1$ termes nuls et un terme égal à 1 qui est sur la ligne $\sigma(j)$. Donc $s_C(M_\sigma, j) = 1$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme σ est une permutation de S_n il existe un seul $k \in S_n$ tel que $\sigma(k) = i$ donc la ligne i de M_σ contient $n - 1$ termes nuls et un terme égal à 1 qui est sur la colonne k . Donc $s_L(M_\sigma, i) = 1$.

On remarque aussi que tous les coefficients de M_σ sont positifs car ils valent 1 ou 0.

Bilan : $M_\sigma \in A_n$.

Ce qui précède permet de dire que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (M_\sigma)_{i,j} = 1$ si et seulement si $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = e_i$ si et seulement si $\sigma(j) = i$.

Donc $({}^t M_\sigma)_{j,i} = 1$ si et seulement si $(M_\sigma)_{i,j} = 1$ si et seulement si $\sigma(j) = i$ si et seulement si $\sigma^{-1}(i) = j$.

Or $(M_{\sigma^{-1}})_{j,i} = 1$ si et seulement si $f_{\sigma^{-1}}(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)} = e_j$ si et seulement si $\sigma^{-1}(i) = j$.

On voit que ${}^t M_\sigma$ et $M_{\sigma^{-1}}$ ont des 1 sur les mêmes positions et des 0 sur les mêmes positions donc elles sont égales.

Bilan : ${}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$.

- (c) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$, soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_i) = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{\sigma(\sigma'(i))} = e_{\sigma \circ \sigma'(i)} = f_{\sigma \circ \sigma'}(e_i)$.

Donc $f_\sigma \circ f_{\sigma'}$ et $f_{\sigma \circ \sigma'}$ coïncident sur une base de \mathbb{R}^n donc sont égaux.

Par conséquent $f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = f_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = f_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ de même $f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma = f_{\sigma^{-1} \circ \sigma} = f_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$

Par traduction matricielle dans la base canonique on a M_σ inversible et $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$.

- (d) On vient de montrer que, pour tout $\sigma \in S_n, M_\sigma$ est inversible et $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} = {}^t M_\sigma$. Donc M_σ est orthogonale.

- (e) On a vu que les matrices M_σ présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne un 1 et $n - 1$ fois 0.

Réciproquement soit M une matrice d'ordre n présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne un 1 et $n - 1$ fois 0. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note n_j la ligne où se trouve l'unique 1 dans la colonne j de M . On a bien sûr $n_j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut définir alors la fonction u telle que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(j) = n_j$.

Si $u(j) = u(i)$, il y a un 1 sur la ligne $u(j)$ et sur les colonnes i et j , par définition de M cela implique $i = j$ donc u est injective.

Comme il y a un 1 sur chaque ligne de M , on peut dire que u est surjective.

Donc u est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $M = M_u$.

Bilan : les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne un 1 et $n - 1$ fois 0.

- 10. Soit $\sigma \in S_n$. montrons que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M \in A_n$, on a $(M)_{i,j} \in [0, 1]$.

Par hypothèse les coefficients de M sont positifs donc $0 \leq (M)_{i,j} \leq \sum_{k=1}^n (M)_{k,j} =$

1 en effet la somme $\sum_{k=1}^n (M)_{k,j}$ contient le terme $(M)_{i,j}$ est les autres sont positifs.

Soit C, D dans A_n telles que $\frac{1}{2}(C + D) = M_\sigma$ alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \frac{1}{2}(C + D)_{i,j} = (M_\sigma)_{i,j}$ donc $\frac{1}{2}((C)_{i,j} + (D)_{i,j}) = (M_\sigma)_{i,j}$. On sait que $(M_\sigma)_{i,j}$ vaut 0 ou 1 et que les deux sont extrémaux dans $[0, 1]$ donc $(C)_{i,j} = (D)_{i,j} = (M_\sigma)_{i,j}$.

Par conséquent $C = D = M_\sigma$.

Bilan : M_σ est un point extrémal de A_n .

- 11. Etude d'un projecteur : on note $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ et $P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma$.

- (a) Soit τ fixé dans S_n . L'application $\varphi_\tau : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui même car l'application τ est bijective donc l'application $\varphi_{\tau^{-1}} : \sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma$ existe et elle vérifie

$$\varphi_\tau \circ \varphi_{\tau^{-1}} = \varphi_{\tau \circ \tau^{-1}} = \varphi_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}} = \text{Id}_{S_n} = \varphi_{\tau^{-1} \circ \tau} = \varphi_{\tau^{-1}} \circ \varphi_\tau.$$

On utilise la linéarité de f_τ pour écrire

$$f_\tau \circ p = f_\tau \circ \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau \circ \sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\varphi_\tau(\sigma)}$$

or φ_τ est une bijection de S_n dans lui même donc $\{f_{\varphi_\tau(\sigma)}\}_{\sigma \in S_n} = \{f_\sigma\}_{\sigma \in S_n}$
 d'où $\sum_{\sigma \in S_n} f_{\varphi_\tau(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$.

Bilan : $f_\tau \circ p = p$.

(b) Pour montrer que $p \circ p = p$, on calcule

$$p \circ p = \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right) \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p = \frac{1}{n!} \times n! \times p = p$$

car il y a $n!$ termes dans l'indexation [$\sigma \in S_n$].

Bilan : p est un projecteur de \mathbb{R}^n .

(c) Comme p est un projecteur, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x \in \text{Im}(p) \iff x = p(x)$.

Ainsi soit $x \in \text{Im}(p)$, alors, pour tout $\sigma \in S_n$, on a $f_\sigma(x) = f_\sigma(p(x)) = f_\sigma \circ p(x) = p(x) = x$.

Réciproquement si, pour tout $\sigma \in S_n$, on a $f_\sigma(x) = x$ alors $p(x) =$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x = x.$$

Bilan : $\text{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.

(d) Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$, il est facile de voir que, pour tout $\sigma \in S_n$,

$$f_\sigma(x) = f_\sigma \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) = \sum_{i=1}^n f_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n e_i = x$$

en utilisant le fait que σ est une bijection et donc $\{\sigma(i)\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \llbracket 1, n \rrbracket$. Cela implique $x_0 \in \text{Im}(p)$.

Réciproquement soit $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $\sigma \in S_n$, $f_\sigma(x) = x$.

Soit i et j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère la permutation σ qui échange i et j et laissent fixes les autres valeurs.

C'est-à-dire $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$, et, pour $k \neq i, k \neq j, \sigma(k) = k$.

$$\text{On a } 0 = f_\sigma(x) - x = f_\sigma \left(\sum_{k=1}^n a_k e_k \right) - \sum_{k=1}^n a_k e_k = \sum_{k=1}^n a_k e_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^n a_k e_k = a_i e_j + a_j e_i - a_i e_i - a_j e_j = (a_i - a_j) e_j + (a_j - a_i) e_i = 0.$$

Donc comme (e_i, e_j) est sous-famille d'une base elle est libre et $a_j = a_i$ et cela pour tout i, j donc $x = a_1 x_0$.

On en déduit que $\text{Im}(p) \subset \text{Vect}(x_0)$.

Bilan : $\text{Im}(p) = \text{Vect}(x_0)$

$$(e) \text{ On a } {}^t P = {}^t \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} {}^t M_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_{\sigma^{-1}} =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma = P$$

car $\{\sigma^{-1}\}_{\sigma \in S_n} = \{\sigma\}_{\sigma \in S_n}$.

On en déduit que la matrice de p , dans une base orthonormée, est symétrique donc p est un projecteur orthogonal.

On sait que les matrices M_σ ne contiennent que des 0 et des 1. On pose $M = \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(M)_{i,j}$ est le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui, à i , associent j . Il y en a $(n-1)!$ c'est-à-dire le nombre de façons de permuer les entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts de i . On en déduit que tous les coefficients de M valent $(n-1)!$. Donc en divisant par $n!$, on voit que P a tous ses coefficients égaux à $\frac{1}{n}$.

(f) Les colonnes et lignes de P contiennent chacune n fois le terme $\frac{1}{n}$ qui est positif donc les sommes des termes valent 1 sur chaque ligne et colonne.

Bilan : $P \in A_n$.

12. Diamètre de A_n .

(a) Si $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ sont deux matrices de E ,

$$\text{Tr}({}^t M.N) = \sum_{i=1}^n ({}^t M.N)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ({}^t M)_{i,j} (N)_{j,i}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M)_{j,i} (N)_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i}.$$

(b) L'application $(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t M.N)$ est un produit scalaire sur E , c'est un résultat classique du cours.

Si (M, N) sont dans E , on note $(M|N) = \text{Tr}({}^t M.N)$ ce produit scalaire, et $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^t M.M)}$ la norme associée.

(c) Soit $\sigma \in S_n$. On a $\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M_\sigma)_{i,j}^2}$. Or dans la matrice M_σ il y a n coefficients valant 1, les autres sont nuls donc $\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{n}$.

- (d) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A_2^2$. Par définition

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \alpha - \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4(\alpha - \beta)^2} = 2|\alpha - \beta|.$$

Or $0 \leq \alpha \leq 1$ et $-1 \leq \beta \leq 0$ donc $-1 \leq \alpha - \beta \leq 1$ donc $|\alpha - \beta| \leq 1$ et pour $\alpha = 1, \beta = 0$ on a $|\alpha - \beta| = 1$.

Bilan : $\delta(A_2) = 2$.

- (e) Soit $n \geq 2$. Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in A_n$. On sait que les coefficients de M sont positifs et que la somme des termes de chaque ligne vaut 1 donc tous les coefficients sont dans $[0, 1]$ donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $0 \leq m_{i,j}^2 \leq m_{i,j}$ donc $\sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \leq \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$. On en déduit que

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Bilan : $\|M\|_2^2 \leq n$.

- (f) On en déduit que

$$\forall (M, N) \in A_n^2, \|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2 - 2\langle M, N \rangle \leq 2n - 2\langle M, N \rangle = 2n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i}.$$

Or $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i} \geq 0$ car les coefficients de M et N sont positifs.

Donc $0 \leq \|M - N\|_2^2 \leq 2n$. On compose par la fonction racine carrée qui est croissante sur \mathbb{R}^+ et $0 \leq \|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$ sachant qu'une norme est positive.

- (g) Soit $\sigma \in S_n$, on définit $\tau \in S_n$ de la façon suivante. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $\sigma(i) < n$ on pose $\tau(i) = \sigma(i) + 1 \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et si $\sigma(i) = n$ on pose $\tau(i) = 1$. Il est clair que τ a n images distinctes et que τ est injectif donc τ est dans S_n . On remarque que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\tau(i) \neq \sigma(i)$.

On en déduit que $(M_\sigma | M_\tau) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i} = 0$. En effet, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} n_{i,j} = 1$ si et seulement si $m_{i,j} = n_{i,j} = 1$ car $m_{i,j}, n_{i,j}$ valent 1 ou 0.

Or $m_{i,j} = n_{i,j} = 1$ si et seulement si $i = \sigma(j)$ et $i = \tau(j)$ ce qui est impossible.

Bilan : $(M_\sigma | M_\tau) = 0$.

- (h) La question 12(f) assure que diamètre de A_n est dominé par $\sqrt{2n}$. Or il existe τ et σ dans S_n tel que $(M_\sigma | M_\tau) = 0$. On sait que M_σ, M_τ sont dans A_n , de sorte que

$$\|M_\sigma - M_\tau\|^2 = \|M_\sigma\|^2 + \|M_\tau\|^2 - 2(M_\sigma | M_\tau) = 2n.$$

Donc $\|M_\sigma - M_\tau\| = \sqrt{2n}$, cela implique que le majorant $\sqrt{2n}$ est un maximum et que le diamètre de A_n est $\|M_\sigma - M_\tau\| = \sqrt{2n}$.

La partie II assure alors que M_σ est un point extrémal de A_n . On peut faire ce raisonnement pour tout $\sigma \in S_n$.

Bilan : les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n .

13. Structure et dimension de F_n .

- (a) • $F_n \subset E$;
• la matrice nulle de E est dans F_n qui n'est donc pas vide ;
• soit $\lambda \in \mathbb{R}, (M, N) \in F_n^2$, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_L(\lambda M + N, i) = \lambda s_L(M, i) + s_L(N, i) = 0$ et $s_C(\lambda M + N, i) = \lambda s_C(M, i) + s_C(N, i) = 0$.

Donc $\lambda M + N \in F_n$.

Bilan : F_n est un **SEV** de E .

- (b) Soit $\Phi : F_n \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de F_n associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2}$. L'action de Φ consiste à supprimer la dernière ligne et la dernière colonne d'une matrice d'ordre n , on obtient une matrice d'ordre $n - 1$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (M, N) \in F_n^2$,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda M + N) &= \Phi(\lambda(m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} + (n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}) = \Phi((\lambda m_{i,j} + n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}) \\ &= (\lambda m_{i,j} + n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} = \lambda(m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} + (n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} = \lambda\Phi(M) + \Phi(N) \end{aligned}$$

Donc $\Phi \in \mathcal{L}(F_n, \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$.

Montrons que Φ est injective. Soit $M \in \text{Ker}(\Phi)$, comme $\Phi(M) = (0)$ alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la i^e ligne de M contient $n-1$ termes nul donc le n^e terme est nul aussi car la somme vaut 0. Il en va de même pour les $(n-1)$ premières colonnes, il reste le terme en position (n, n) qui vaut 0 car tous les autres valent 0, finalement M est la matrice nulle d'ordre n .

Montrons que Φ est surjective. Soit $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $b_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j}$ de sorte que $\sum_{j=1}^n b_{i,j} = 0$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $b_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,j}$ de sorte que $\sum_{i=1}^n b_{i,j} = 0$.

Il reste à déterminer $b_{n,n}$ et à vérifier que $\sum_{i=1}^n b_{i,n} = 0 = \sum_{j=1}^n b_{n,j}$.

Pour cela on pose $b_{n,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} b_{n,j} = -\sum_{j=1}^{n-1} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{i,j}$.

On vérifie que $-\sum_{i=1}^{n-1} b_{i,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} b_{i,j}\right) = b_{n,n}$.

Ainsi la matrice $(b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est bien dans F_n et elle est antécédent de B par Φ .

Φ est donc surjective.

Bilan : Φ est un isomorphisme de F_n dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ donc la dimension de F_n est celle de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ donc $(n-1)^2$.

14. On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n .

On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

$\mathcal{P}(n)$: Si M est un point extrémal de A_n , alors M est une matrice de permutation.

- (a) La question 4 montre que dans A_2 seuls I_2 et J sont extrémaux et ce sont les seules matrices de permutation de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère un entier naturel $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}(n-1)$ soit réalisé et on se donne une matrice $M \in E$ telle que $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est un point extrémal de A_n .

On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k, j_k} est non nul.

On pose alors $H = \text{Vect}(E_{i_k, j_k} / k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket)$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ sont les matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception du coefficient d'indices (i, j) qui vaut 1.

- (b) On sait que H et F_n sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\dim(H + F_n) = \dim(H) + \dim(F_n) - \dim(H \cap F_n) = (n-1)^2 + 2n - \dim(H \cap F_n).$$

En effet H est de dimension $2n$ car il a une famille génératrice à $2n$ vecteurs qui est libre car sous-famille d'une base.

Or $H + F_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(H + F_n) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$ donc $\dim(H \cap F_n) \geq (n-1)^2 + 2n - n^2 = 1$.

Bilan : $H \cap F_n \neq \{0_E\}$.

- (c) On prend N non nul dans $H \cap F_n$ et pour tout réel t , on note $Q_t = M + tN$. On peut remarquer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_L(Q_t) = s_L(M + tN) = s_L(M) + ts_L(N) = 1 + 0 = 1$ car M est dans A_n et N est dans F_n . De même $s_C(Q_t) = s_C(M + tN) = s_C(M) + ts_C(N) = 1 + 0 = 1$.

Il reste à trouver $\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (Q_t)_{i,j} \geq 0$.

On pose $K = \{(i_k, j_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \text{ tel que } k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \text{ et } m_{i_k, j_k} \neq 0\}$. Comme l'ensemble $\{m_{i_k, j_k}\}_{(i_k, j_k) \in K}$ est non vide, fini et inclus dans \mathbb{R}^{+*} , il a un minimum que l'on note $m > 0$.

On sait que N est dans H et qu'il est non nul donc il existe des scalaires a_1, a_2, \dots, a_{2n} non tous nul tels que

$$N = \sum_{k=1}^{2n} a_k E_{i_k, j_k}.$$

On note $r = \max_{1 \leq k \leq 2n} (|a_k|)$, ce r existe car l'ensemble est fini et $r > 0$ car il y a au moins un terme strictement positif.

On pose $\epsilon = \frac{m}{r} > 0$. Soit un réel $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, prenons $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Si $(Q_t)_{(i,j)} = 0$ alors $(Q_t)_{(i,j)} \geq 0$.

Si non soit $(i_k, j_k) \in K$, $(Q_t)_{(i_k, j_k)} = (M)_{(i_k, j_k)} + t(N)_{(i_k, j_k)}$, comme $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, on a $|t| < \frac{m}{r}$, on multiplie par $|(N)_{(i_k, j_k)}| \geq 0$ ainsi $|t(N)_{(i_k, j_k)}| \leq \frac{m}{r} |(N)_{(i_k, j_k)}|$.

Or $(N)_{(i_k, j_k)} = a_k$ donc $\frac{|a_k|}{r} \leq 1$ de sorte que $|t(N)_{(i_k, j_k)}| \leq m$ donc

$-m \leq t(N)_{(i_k, j_k)} \leq m$ et $m_{(i_k, j_k)} - m \leq (M)_{(i_k, j_k)} + t(N)_{(i_k, j_k)} \leq (M)_{(i_k, j_k)} + m$.

Or m est le minimum de $\{m_{i_k, j_k}\}_{(i_k, j_k) \in K}$ donc $0 \leq m_{(i_k, j_k)} - m$.

Finalement pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $Q_t \in A_n$.

- (d) En considérant $t \in]-\epsilon, \epsilon[$ et $t \neq 0$, comme $N \neq (0)$, on a $Q_t \neq M$ et $Q_{-t} \neq M$, de plus

$$\frac{1}{2}(Q_t + Q_{-t}) = \frac{1}{2}(M + tN + M - tN) = M$$

avec $Q_t \in A_n, Q_{-t} \in A_n$.

Donc M n'est pas extrémal dans A_n .

On aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M a au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

- (e) La somme des coefficients de chaque colonne de M vaut 1 donc il y a au moins un terme non nul dans chaque colonne de M . Cela représente n termes. Il en reste au plus $n - 1$ non nul, comme il y a n colonnes, il y a au moins une colonne sans deuxième terme non nul.

Bilan : il existe une colonne de M n'ayant qu'un seul terme non nul, et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice tel que $m_{r,s} = 1$.

- (f) On sait que la somme des coefficients de la ligne r vaut 1 or $m_{r,s} = 1$ donc s'il y a un autre terme non nul, il est forcément strictement positif et $s_L(M, r) > 1$. C'est absurde.

Bilan : la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

- (g) On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r .

On a M' d'ordre $n - 1$.

Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, i < r$, on a $s_L(M', i) = s_L(M, i) + m_{i,s} = s_L(M, i) = 1$.

Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, i \geq r$, on a $s_L(M', i) = s_L(M, i + 1) + m_{i+1,s} = s_L(M, i + 1) = 1$.

Soit $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, j < s$, on a $s_C(M', j) = s_C(M, j) + m_{r,j} = s_C(M, j) = 1$.

Soit $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, j \geq s$, on a $s_C(M', j) = s_C(M, j + 1) + m_{r,j+1} =$

$s_C(M, j + 1) = 1$.

Les coefficients de M' clairement positifs donc $M' \in A_{n-1}$.

Montrons que M' est un point extrémal de A_{n-1} . On se donne C', D' dans A_{n-1} tels que $\frac{1}{2}(C' + D') = M'$.

On ajoute à C' une colonne à la position r et une ligne à la position s en décalant les colonnes d'indices r ou plus et les lignes d'indice s ou plus. Cette colonne et cette ligne ne contiennent que des 0 sauf en position (r, s) où le coefficient vaut 1. On note C cette matrice d'ordre n .

On fait la même chose sur D' , on note D la nouvelle matrice. On vérifie facilement que C et D sont dans A_n . Il suffit de reprendre la méthode du début de cette question. Par somme on remarque que $\frac{1}{2}(C + D) = M$. Or, par hypothèse, M est extrémal dans A_n donc $C = D = M$. Donc $C' = D' = M'$.

Bilan : M' est un point extrémal de A_{n-1} .

- (h) On a supposé que $\mathcal{P}(n - 1)$ est réalisé, comme M' est un point extrémal de A_{n-1} , on peut dire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} .

Donc M' ne contient que des 0 et des 1 et en ajoutant la colonne et la ligne pour reconstruire M , on voit que M ne contient que des 0 et des 1 et comme M est dans A_n , on peut affirmer que M est une matrice de permutation de A_n . Donc $\mathcal{P}(n)$ est réalisé. Cela termine la preuve par récurrence.