Devoir Maison 16

Pour le 18 mars 2024

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

   Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de coordonnées respectives $(a\ ;\ -5\ ;\ 1-a)$ et $(1+b\ ;\ 1\ ;\ b)$.

   Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

   Pour tout entier n, on désigne par :

   A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,

   B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,

   C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

   (a) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

   (b) Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(\mathrm{A}_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. (a) Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Exercice 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.

2. (a) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

(d) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans A ou dans C.

Pour tout entier naturel n, on définit l'événement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \ ; \ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $b_{n+2} = \dfrac{1}{2}b_{n+1} + \dfrac{1}{2}b_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. (a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n = A^n U_0$.

(c) Déduire de la question 2.d) que pour tout entier naturel n on a : $b_n = \dfrac{1}{3}\left(2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.