Devoir Maison 16 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement leur produit scalaire (le repère est orthonormal) est nul. D'où $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = 0 \Leftrightarrow a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0 \Leftrightarrow a + b - 5 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a+b=5}$.

   Les tirages $(a\ ;\ b)$ favorables sont : $(1\,;\,4)$, $(2\,;\,3)$, $(3\,;\,2)$, et $(4\,;\,1)$ sur 4×4 tirages possibles.

   $p\left(\text{Vect}\,U \cdot \text{Vect}\,V\right)$ orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{4}{16} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$.

2. (a) D'après la question **1.** A et B ont chacun 1 chance sur 4 d'obtenir des vecteurs orthogonaux et donc 3 chances sur 4 de ne pas obtenir des vecteurs orthogonaux.

   Au premier jeu on a donc si A obtient une somme égale à 5 et B non (ou le contraire), $p(\mathrm{A}_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16} = p(\mathrm{B}_1)$.

   D'aprés la loi des probabilités totales, on a $p\left(\mathrm{A}_1\right) + p\left(\mathrm{B}_1\right) + p\left(\mathrm{C}_1\right) = 1 \Leftrightarrow p\left(\mathrm{C}_1\right) = 1 - \dfrac{6}{16} = \dfrac{10}{16}$ $\left(\text{ou encore } p(\mathrm{C}_1) = \dfrac{5}{8}\right)$.

   (b) A chaque nouveau jeu les probabilités de gagner pour A, gagner pour B et rejouer sont respectivement $\dfrac{3}{16}$, $\dfrac{3}{16}$ et $\dfrac{10}{16}$.

   On a donc $p\left(\mathrm{C}_{n+1}\right) = p\left(C_n\right) = \dfrac{10}{16}$. On reconnait une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{16}$. On a donc $p\left(\mathrm{C}_n\right) = \left(\dfrac{10}{16}\right)^n = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   De même $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\right) = p\left(C_n\right) \times \dfrac{3}{16} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n \times \dfrac{3}{16}$, soit en décalant l'indice de 1 : $p\left(\mathrm{A}_n\right) = \dfrac{3}{16} \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. On a $-1 < \dfrac{5}{8} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p\left(\mathrm{A}_n\right) = 0$.

   $p\left(\mathrm{A}_n\right) < 0,01 \Leftrightarrow \dfrac{3}{16} \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} < 10^{-2} \Leftrightarrow \ln\dfrac{3}{16} + (n-1)\ln\dfrac{5}{8} < -2\ln 10 \Leftrightarrow$ $n - 1 \geqslant \dfrac{-2\ln 10 - \ln\dfrac{3}{16}}{\ln\dfrac{5}{8}}$ (ATTENTION : $\dfrac{5}{8} < 1$, donc $\ln\dfrac{5}{8} < 0$, l'ordre CHANGE) $\approx 6,2 \Leftrightarrow n > 7,2$.

   Conclusion le plus petit naturel est $n = 8$. (la calculatrice donne bien pour $n = 7$ une probabilité de $0,011$ et pour $n = 8$ une probabilité de 0,00698.

Exercice 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   P est inversible car $1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$. Calculons son inverse :

$$
\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2 \end{array} & \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}
\end{array}
$$

   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.

   Calculons :

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\
&= D
\end{aligned}
$$

2. (a) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.

$$P^{-1}AP = D \ \underline{\text{ssi}}\ PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1} \ \underline{\text{ssi}}\ \boxed{A = PDP^{-1}}$$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Procédons par récurrence :

   — Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$, d'où l'égalité.

— Supposons $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un entier naturel $n \geq 0$ fixé, et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= PDID^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

— D'après le principe de récurrence simple, l'égalité est établie pour tout entier naturel n : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$

(c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

D est diagonale, donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{2})^n \end{pmatrix}}$

(d) En posant le produit matriciel des " matrices ainsi obtenues pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \ ; \ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \ \text{ et } \ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. A_n, B_n et C_n constituent un système complet d'événements. Il vient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 \\ &= \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 \\ &= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 \\ &= \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

En effet :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = 0$$

car si la mouche est en A ou C à l'instant n, elle va forcément en B à l'instant $n+1$ donc elle ne reste ni en A ni en C,

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

car si la mouche est en B à l'instant n, elle reste en B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et elle va en A ou en C avec la même probabilité, qui vaut $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$$

car si la mouche est en A ou C à l'instant n, elle va forcément en B à l'instant $n+1$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \end{cases}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= a_{n+1} + \frac{1}{2} b_{n+1} + c_{n+1} \\ &= \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{4} b_n \\ &= \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n. \end{aligned}$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. (a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.

$U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ car $b_0 = 1$ puisque la mouche se trouve dans la pièce B à l'instant 0, et $b_1 = a_0 + \frac{1}{2} b_0 + c_0 = 0 + \frac{1}{2} \times 1 + 0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, pour tout entier nature n :

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n = A^n U_0$.

— C'est vrai pour $n = 0$ car $A^0 = I$.
— Supposons $U_n = A^n U_0$ pour un entier naturel $n \geq 0$ fixé, et montrons $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.
On a :

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

— D'après le principe de récurrence simple, l'égalité est établie pour tout entier naturel n : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0}$

(c) Déduire de la question 2.d) que pour tout entier naturel n on a : $b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $U_n = A^n U_0$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{3} \left(2 + (\frac{-1}{2})^n\right)}$

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Pour $n \geq 1$, $a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{12} \left(2 + (\frac{-1}{2})^{n-1}\right)$

Pour $n = 0$, $a_0 = c_0 = 0$ et $2 + (\frac{-1}{2})^{-1} = 2 - 2 = 0$. Donc l'expression est également valable pour $n = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n = \frac{1}{12} \left(2 + (\frac{-1}{2})^{n-1}\right)}$$