Devoir Maison 16 - Eléments de Correction

Exercice 1

Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. $\Delta = q^2 - 4(-pq) = q^2 + 4pq, où\ p > 0, q > 0 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \dfrac{q - \sqrt{\Delta}}{2}, r_2 = \dfrac{q + \sqrt{\Delta}}{2}$ $(r_1 < r_2) \Longrightarrow r_1 + r_2 = q$,
   $r_1 r_2 = \dfrac{1}{4}\left(q^2 - \Delta\right) = \dfrac{1}{4}(-4pq) = -pq$.
2.
$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - q - pq = p - pq = p(1-q) = p^2 \\ f(-1) &= 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = 1 + q^2 \\ f(0) &= -pq \end{aligned}$$

3. $f(1) > 0, f(-1) > 0, f(0) < 0$ et le tableau de signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	-1		r_1		0		r_2		+1	$+\infty$
$f(x)$			+	0		$-$		0	+		

$$\Longrightarrow -1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$$

or $r_1 + r_2 = q \Longrightarrow r_1 + r_2 > 0$ donc $r_2 > -r_1$ où $|r_1| = -r_1$ et $|r_2| = r_2$

$$donc : |r_1| < |r_2| < 1$$

Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. $a_1 = P(P_1 P_2) = p^2$
   $a_2 = P(A_2) = P(F_1 P_2 P_3) = qp^2$
   $a_3 = P(A_3) = P(F_1 F_2 P_3 P_4) + P(P_1 F_2 P_3 P_4) = q^2 p^2 + qp^3 = qp^2(q+p) = qp^2$
2. Par la formule des probabilités totales avec le système complet $\{F_1, P_1\}$:

$$P(A_{n+2}) = P(A_{n+2} \cap F_1) + P(A_{n+2} \cap P_1)$$

$n \geq 0 \Longrightarrow n + 2 \geq 2, A_{n+2} \cap P_1 = A_{n+2} \cap P_1 \cap F_2$ car $A_{n+2} \cap P_1 \cap P_2 = \emptyset$

— Si on a obtenu pile au premier tirage et face au deuxième tirage alors il reste n essais pour obtenir A_{n+2} donc $P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) = P(A_n)$

— Si on a obtenu face au premier tirage, alors il reste $(n+1)$essais pour obtenir A_{n+1} donc $P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1})$
donc, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(F_1) \times P_{F_1}(A_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2) \times P_{P_1 \cap F_2}(A_{n+2}) \\ &= qa_{n+1} + pqa_n \\ &\Leftrightarrow a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0 \end{aligned}$$

3. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$f(x) = 0$$

donc il existe deux réels h et k tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , a_n = h(r_1)^n + k(r_2)^n)$$

En particulier :$a_0 = 0 \Longrightarrow h + k = 0 \Leftrightarrow h = -k; a_1 = p^2 \Longrightarrow hr_1 + kr_2 = p^2$
donc $h(r_1 - r_2) = p^2$ et $h = \dfrac{p^2}{r_1 - r_2} = -k$

$$donc : a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right], \forall n \in \mathbb{N}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}\ , a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] = \dfrac{p^2 (r_2)^n}{r_2 - r_1}\left(1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n\right), où \left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| < 1$ donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n\right) = 1$ et $\boxed{a_n \lim_{+\infty} \sim \dfrac{p^2 (r_2)^n}{r_2 - r_1}}$

Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A\,X_n &= \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa_{n+1} + pqa_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ donc &: \quad X_{n+1} = A\,X_n \end{aligned}$$

2. $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ est non inversible car la deuxième colonne de cette matrice C_2 est colinéaire à la 1ère ($C_2 = -r_2 C_1$).

   De même $A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. ($C'_2 = -r_2 C'_1$)

3. Montrons que P est inversible à l'aide de la méthode du pivot :

$$\begin{array}{rcl} P & = & \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ & & \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_1 - r_1 L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \\ r_1 & \neq & 0, r_2 - r_1 \neq 0 \Longrightarrow P \text{ est inversible} \\ & & \begin{pmatrix} r_1 (r_2 - r_1) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow (r_2 - r_1) L_1 - r_2 L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \\ I & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 / (r_1 (r_2 - r_1)) \\ L_2 \longleftarrow L_2 / (r_2 - r_1) \end{array} \boxed{\frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} = P^{-1}} \end{array}$$

4. Remarquons que le calcul de $P^{-1} A P$ n'est pas vraiment nécessaire puisqu'il suffit de remarquer que :

$$A \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)^2 \\ r_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_2)^2 \\ r_2 \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Donc les colonnes de P sont en fait deux vecteurs de A associés respectivement à chacune des deux valeurs propres r_1 et r_2, donc P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base de vecteurs propres qui diagonalise l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à A donc par le théorème de changement de base :

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

5. Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$X_n = P D^n P^{-1} X_0$$

   si $n = 0, X_n = X_0$ et $P D^n P^{-1} X_0 = P I P^{-1} X_0 = X_0$ donc la relation est vraie pour $n = 0$

   Supposons qu'au rang $n, X_n = P D^n P^{-1} X_0$

   alors comme $X_{n+1} = A X_n$ et $A = P D P^{-1}, X_{n+1} = P D P^{-1} P D^n P^{-1} X_0 = P D^{n+1} P^{-1} X_0$

   Ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève sa preuve en vertu du principe de récurrence.

6. D étant une matrice diagonale, pour tout entier naturel n :

$$D^n = \begin{pmatrix} (r_1)^n & 0 \\ 0 & (r_2)^n \end{pmatrix}$$

   donc $X_n = P D^n P^{-1} X_0 = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r_1)^n & 0 \\ 0 & (r_2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $= \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} (-r_1 r_1^n + r_2 r_2^n) p^2 \\ (-r_1^n + r_2^n) p^2 \end{pmatrix} = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -r_1^{n+1} + r_2^{n+1} \\ (-r_1^n + r_2^n) \end{pmatrix}$, on retrouve ainsi

$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} [r_2^n - r_1^n], \forall n \in \mathbb{N}$$

Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$P[T = n+1] = a_n$$

1.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P[T = n+1] &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} [r_2^n - r_1^n], où \ -1 < r_1 < r_2 < 1 \end{aligned}$$

   donc les 2 séries $\sum_{n=1}^{+\infty} r_i^n$ sont convergentes telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_i^n = \dfrac{1}{1 - r_i}, i = 1, 2$

   Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} P[T = n+1] = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\dfrac{1}{1 - r_2} - \dfrac{1}{1 - r_1} \right) = \dfrac{p^2}{(1 - r_2)(1 - r_1)} = 1$ car

   $f(1) = p^2 = (1 - r_2)(1 - r_1)$ (en utilisant la factorisation usuelle $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$)