Devoir Maison 16

Pour le lundi 4 Mai 2026

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :

“ deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n+1$ ”.

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$ avec la convention $a_0 = 0$.

1. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

2. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   — on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, $A_n$est réalisé

   ou

   — on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ; $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}((r_2)^n - (r_1)^n)$.
4. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n tout entier naturel n, par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
   (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de $r_1$et $r_2$seulement).
5. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n ; $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
6. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

4. Étude du temps d'attente du premier double pile : pour les curieux !

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n ; $P(T = n+1) = a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n+1) = 1$.
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T) = \dfrac{1+p}{p^2}$.