Devoir Maison 15

Pour le 11 mars 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On le muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

A tout polynôme P on associe sa fonction polynomiale encore notée P.

P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons le polynôme Q tel que sa fonction polynomiale associée soit définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad Q(0) = P(0).$$

Nous définissons alors une application φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant $\varphi(P) = Q$

1. Démontrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathcal{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).
4. Notons $P_0 = (X-1)^2$, $P_1 = (X-1)(X+1)$ et $P_2 = (X+1)^2$.
   Montrer que $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathcal{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P calculée en 1.
6. Calculer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ dans la base $\mathcal{F}$ puis écrire la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2

Equations différentielles avec fonction définie par une intégrale

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

Partie A. Un premier cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

1. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,. \qquad (E)$$

   (a) Calculer $f(0)$.

(b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

(c) En déduire la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

Partie B. Un second cas particulier

Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

1. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

(a) Calculer $f(0)$.

(b) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

(c) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et e^x. Calculer $f'(0)$.

(d) Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, $f'(x)$ et e^x.

(e) Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

(f) En déduire la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

Partie C. Résolution de l'équation homogène

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle.
On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **Calcul des dérivées successives de f**

(a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

(b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

(c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

(d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Soit A un nombre réel strictement positif.

(a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que $\forall x \in [-A; A], \qquad |f(x)| \leq M$ et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$\forall x \in [-A; A], \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(b) Soit x un nombre réel appartenant à $[-A; A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $|f(x)| \leq M \dfrac{A^{n+1}}{(n+1)!}$ et en déduire que $f(x) = 0$.

4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Partie D.Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

2. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$