

Devoir Maison 15 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$Q(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (at^2 + bt + c) dt = \frac{1}{x} \left[a \frac{t^3}{3} + b \frac{t^2}{2} + ct \right]_0^x = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c$$

et

$$Q(0) = P(0) = c.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c,$$

ce qui prouve bien que

Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

2. Le résultat de la question précédente signifie que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Reste donc à démontrer la linéarité de φ . Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose $Q_1 = \varphi(P_1), Q_2 = \varphi(P_2)$ et $Q = \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$Q(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda P_1(t) + \mu P_2(t)) dt = \lambda \frac{1}{x} \int_0^x P_1(t) dt + \mu \frac{1}{x} \int_0^x P_2(t) dt = \lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x)$$

$$\text{et } \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2)(0) = (\lambda \widetilde{P_1} + \mu \widetilde{P_2})(0) = \lambda \widetilde{P_1}(0) + \mu \widetilde{P_2}(0) = \lambda \varphi(P_1)(0) + \mu \varphi(P_2)(0)$$

d'où $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \mu \varphi(P_2)$. En conclusion, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On a vu que, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\varphi(P)(X) = \frac{a}{3}X^2 + \frac{b}{2}X + c$. Il s'ensuit que

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = \frac{1}{2}X \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = \frac{1}{3}X^2$$

et donc que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4. La matrice de la famille (P_0, P_1, P_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \text{ donc la famille } (P_0, P_1, P_2)$$

est génératrice de \mathbb{R}^3 . Comme elle est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 alors c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme (c_0, c_1, c_2) est la famille des composantes de P dans la base \mathcal{F} , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{P}(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

En évaluant cette relation en 1 et -1 , on obtient

$$\widetilde{P}(1) = 4c_2 \quad \text{et} \quad \widetilde{P}(-1) = 4c_0.$$

Par ailleurs, en dérivant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{P}'(x) = 2c_0(x-1) + c_1(x+1) + c_1(x-1) + 2c_2(x+1),$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $x = 1$,

$$\widetilde{P}'(1) = 2c_1 + 4c_2.$$

On en déduit que

$$c_0 = \frac{\widetilde{P}(-1)}{4}, \quad c_1 = \frac{\widetilde{P}'(1) - \widetilde{P}(1)}{2} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\widetilde{P}(1)}{4}.$$

5. On pose $Q_0 = \varphi(P_0)$ $Q_1 = \varphi(P_1)$ $Q_2 = \varphi(P_2)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q}_0(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (t-1)^2 dt = \frac{1}{x} \left[\frac{(t-1)^3}{3} \right]_0^x = \frac{(x-1)^3 + 1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$,

donc, lorsque $P = P_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q}_0(-1)}{4} = \frac{7}{12}, \quad c_1 = \frac{\widetilde{Q}_0'(1) - \widetilde{Q}_0(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{\widetilde{Q}_0(1)}{4} = \frac{1}{12}$$

ce qui donne

$$\varphi(P_0) = \frac{7}{3}P_0 - \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q}_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (t^2 - 1) dt = \frac{1}{x} \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_0^x = \frac{1}{3}x^2 - 1$,

donc, lorsque $P = P_1$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q}_1(-1)}{4} = -\frac{1}{6}, \quad c_1 = \frac{\widetilde{Q}_1'(1) - \widetilde{Q}_1(1)}{2} = \frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{\widetilde{Q}_1(1)}{4} = -\frac{1}{6}$$

ce qui donne

$$\varphi(P_1) = -\frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 - \frac{1}{6}P_2.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q}_2(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (t+1)^2 dt = \frac{1}{x} \left[\frac{(t+1)^3}{3} \right]_0^x = \frac{(x+1)^3 - 1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 + x + 1$,

donc, lorsque $P = P_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q}_2(-1)}{4} = \frac{1}{12}, \quad c_1 = \frac{\widetilde{Q}_2'(1) - \widetilde{Q}_2(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{\widetilde{Q}_2(1)}{4} = \frac{7}{12}$$

ce qui donne

$$\varphi(P_2) = \frac{1}{12}P_0 - \frac{1}{3}P_1 + \frac{7}{12}P_2.$$

On en déduit que

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

Exercice 2

Partie A.

1. (a) $f(0) = \int_0^0 f(t)dt + e^0 = 0 + 1$ donc $f(0) = 1$

(b) La relation nous dit que la fonction f est la somme de $x \mapsto e^x$, qui est bien sûr de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et de l'application $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, qui est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que primitive (qui s'annule en 0) de la fonction continue f . Les théorèmes généraux sur la dérivabilité nous permettent donc d'affirmer que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Remarque : A fortiori, f est dérivable sur \mathbb{R} .

En dérivant la relation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + e^x.$$

(c) La question précédente nous dit que f est solution de l'équation différentielle $y' - y = e^x$.

D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_h(x) = \lambda e^x \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Selon la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière y_p de l'équation $y' - y = e^x$ sous la forme $\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \lambda(x) e^x$ où λ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} . En reportant dans l'équation $y' - y = e^x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) e^x = e^x$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = 1$. On peut alors prendre $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = x$, ce qui nous donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = x e^x.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation $y' - y = e^x$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (\lambda + x) e^x \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La condition $f(0) = 1$ implique alors que f est la solution de $y' - y = e^x$ pour laquelle $(\lambda + 0) e^0 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + x) e^x.$$

2. La question précédente nous dit que la seule solution possible de , qui est continue sur \mathbb{R} , est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + x) e^x.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x (1+t)e^t dt + e^x &= [(1+t)e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt + e^x \\ &= (1+x)e^x - 1 - [e^t]_0^x + e^x \\ &= (1+x)e^x - 1 - e^x + 1 + e^x \\ &= (1+x)e^x, \end{aligned}$$

où l'intégration par parties de la première ligne est justifiée par le caractère \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} des applications $t \mapsto 1+t$ et $t \mapsto e^t$. Donc f est bien solution de l'équation.

En conclusion,

le problème possède une unique solution continue
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x)e^x$.

Partie B.

1. (a) $f(0) = \int_0^0 f(t) dt + e^0 = 0 + 1$ donc $f(0) = 1$.

(b) La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , le théorème de Darboux (« Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle ») nous dit que

f admet une primitive F (de classe \mathcal{C}^1) sur \mathbb{R} .

La relation s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(-x) - F(0) + e^x.$$

(c) Les résultats de la question précédente nous disent que f s'expriment comme somme de composées de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité,

f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(-x) - F(0) + e^x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(-x) + e^x.$$

En choisissant $x = 0$ dans cette formule, il vient $f'(0) = -f(-0) + e^0 = -1 + 1 = 0$, donc

$$f'(0) = 0.$$

(d) La relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$ nous dit que f' est la somme de composées de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f' est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , ce qui signifie que

f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f'(-x) + e^x.$$

(e) La relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$ (démontrée à la question 2. a) β) implique que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f(x) + e^{-x}$. En combinant ce résultat avec celui de la question 2. a) γ], on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

(f) La question précédente nous dit que f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = e^x + e^{-x}.$$

L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $r^2 + 1$ dont les solutions sont $r = \pm i$. Donc, d'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_h(x) = e^{0x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Selon le principe de superposition, on recherche d'une part une solution particulière $y_{p,1}$ de l'équation $y'' + y = e^x$ et d'autre part une solution particulière $y_{p,2}$ de l'équation $y'' + y = e^{-x}$. De façon évidente, on peut prendre $\forall x \in \mathbb{R}, y_{p,1}(x) = \frac{1}{2}e^x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, y_{p,2}(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$. Cela nous donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation $y'' + y = e^x + e^{-x}$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ impliquent alors que f est la solution de $y'' + y = e^x + e^{-x}$ pour laquelle $\lambda.1 + \mu.0 + \frac{1+1}{2} = 1$ et $-\lambda.0 + \mu.1 + \frac{1-1}{2} = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

2. La question précédente nous dit que la seule solution possible, qui est continue sur \mathbb{R} , est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt + e^x &= \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^{-x} + e^x \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} + e^x \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que la fonction f est bien solution.

En conclusion,

$$\begin{array}{l} \text{le problème possède une unique solution continue} \\ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Partie C

1. (a) La continuité de f associée au théorème de Darboux permet là encore d'affirmer que

$$f \text{ admet une primitive } F \text{ (de classe } \mathcal{C}^1 \text{) sur } \mathbb{R}.$$

La relation s'écrit alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(ax) - F(0).$$

(b) Les résultats de la question précédente nous disent que f s'exprime comme somme de composées de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(ax) - F(0)$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(ax).$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathcal{P}(n) : \ll f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x) \gg.$$

Initialisation : Par hypothèse, f est continue sur \mathbb{R} et il est évident que l'on a $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = a^{0(0+1)/2} f(a^0 x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (d'après 3.a) β), la fonction $x \mapsto a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc $f^{(n)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , ce qui signifie que f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} . En dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2} \cdot a^n f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2} \cdot a^n \cdot a \cdot f(a \cdot a^n x) \quad \text{d'après 3.a) } \beta \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x), \end{aligned}$$

ce qui termine de démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

(d) En choisissant $x = 0$ dans la relation établie à la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(a^n \cdot 0) = a^{n(n+1)/2} \cdot f(0).$$

Or, en choisissant $x = 0$ dans l'équation, on a

$$f(0) = \int_0^{a \cdot 0} f(t) dt = 0,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathcal{Q}(n) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \gg.$$

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t) dt = \int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x),$$

car $f(0) = 0$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{Q}(n+1)$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , il est licite d'effectuer une intégration par parties par l'intégrale ci-dessus, ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right)' f^{(n+1)}(t) dt \\ &= -\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= 0 + 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $f^{(n+1)}(0) = 0$ pour annuler un terme. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

3. (a) Un théorème du cours (appelé parfois « théorème des bornes ») dit que « toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment (et y atteint ses bornes) ». Appliqué à f sur le segment $[-A; A]$ (où f est bien continue), ce théorème permet d'affirmer que

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leq M.$$

On sait, d'après 3.a) γ], que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En prenant les valeurs absolues dans cette égalité et la restreignant au segment $[-A; A]$, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| = |a|^{n(n+1)/2} |f(a^n x)|.$$

D'une part, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a|^{n(n+1)/2} \leq 1$$

puisque $a \in [-1; 1]$

D'autre part, pour tout $x \in [-A; A]$, on a $a^n x \in [-A; A]$ puisque $a \in [-1; 1]$. Donc, d'après le résultat encadré ci-dessus, on peut affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f(a^n x)| \leq M.$$

La combinaison de tous ces résultats nous dit alors que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| && \text{d'après 3. b)} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \right| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M dt \right| && \text{d'après 3. c) } \alpha \text{ et le fait que } [0 \overset{\leftarrow}{\rightsquigarrow} x] \subset [-A; A] \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \begin{cases} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [0; A] \\ \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [-A; 0] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Comme $x \in [-A; A]$, on a, par ailleurs, $|x| \leq A$, ce qui donne finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Cette inégalité étant satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est licite de vouloir passer à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$. Pour cela, on remarque que le théorème sur les croissances comparées des suites de référence ou encore la convergence vers 0 du terme général de la série exponentielle convergente $\sum_{n \geq 0} A^{n+1}/(n+1)!$ nous dit que

$$\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $|f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme $|f(x)|$ ne dépend pas de n , il s'ensuit que $|f(x)| = 0$, c'est-à-dire

$$f(x) = 0.$$

4. Le résultat de la question précédente nous dit que f est la fonction nulle sur $[-A; A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ et donc que

$$f \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}.$$

Remarque : On a ainsi démontré que la seule solution possible du problème $(E_{a,0})$ est la fonction nulle. Comme il est évident que la fonction nulle est bien solution de l'équation, on peut affirmer que la fonction nulle est la seule solution de l'équation homogène $(E_{a,0})$.

Partie D.

1. Considérons f_1 et f_2 deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont continues sur \mathbb{R} et toutes les deux solutions du problème $(E_{a,\varphi})$.

On peut alors écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \int_0^{ax} f_1(t) dt + \varphi(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \int_0^{ax} f_2(t) dt + \varphi(x).$$

En soustrayant ces deux égalités et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 - f_2)(x) = \int_0^{ax} (f_1 - f_2)(t) dt,$$

ce qui signifie que $f_1 - f_2$ (qui est continue sur \mathbb{R} en tant que différence de deux telles fonctions) est solution du problème $(E_{a,0})$. Comme la question précédente nous dit que la seule solution de ce problème est la fonction nulle, on en déduit que $f_1 - f_2 = 0$, c'est-à-dire $f_1 = f_2$.

On en conclut que,

sous réserve d'existence, il existe une unique application f , continue sur \mathbb{R} , vérifiant $(E_{a,\varphi})$.

2. On en conclut que

l'ensemble des fonctions f , continues sur \mathbb{R} , solutions du problème $(E_{a,\varphi})$ est ou bien vide ou bien un singleton.