

Devoir Maison 15 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. On a $e^h = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - (1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x))}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon_2(x) \quad (\text{DL d'ordre 1}) \end{aligned}$$

Donc $f(x) \rightarrow 1 = f(0)$ quand $x \rightarrow 0^+$ et f est continue en 0^+ .

De plus, f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient ($x \neq 0$) de fonctions continues.

Conclusion : f est continue sur $[0, +\infty[$

2. Le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{1 - \frac{1}{2}x + x\varepsilon_2(x) - 1}{x} \\ &= -\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3. Comme $x \neq 0$, alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour $x > 0$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1 - e^{-x})}{x^2}$$

donc avec $\varphi(x) = e^{-x}(x+1) - 1$ on a

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -xe^{-x}$$

x	0	
$\varphi'(x)$	0	—
$\varphi(x)$	0	$\searrow$ —
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	—
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

et en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x} \rightarrow 1}{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$$

on a Étudier les variations de φ ; En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

1. Pour minorer l'intégrale, on travaille sur le contenu. D'où peut venir le $\ln$? D'où viendra le $\frac{1}{e}$?

Pour tout $u \in [0, n]$: $-u/n \geq -n/n = -1$ donc $e^{-u/n} \geq e^{-1}$ et $\frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} \geq \frac{1}{1+u}$.

Comme les bornes sont croissantes on a alors

$$\int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du \geq \int_0^n \frac{e^{-1}}{1+u} du = \frac{1}{e} [\ln(1+u)]_0^n$$

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul $u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$ et par minoration $u_n \rightarrow +\infty$

2. f est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ existe
 3. On fait réapparaître l'intégrale pour u_n : a Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n &= \int_0^n \frac{1}{1+u} du - \int_0^n \frac{e^{-u/n}}{1+u} du \\ &= \int_0^n \frac{1 - e^{-u/n}}{1+u} du \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $x = u/n \iff u = nx : du = ndx : u = 0 \iff x = 0 : u = n \iff x = 1$ donc

$$\int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n = \int_0^1 n \frac{1-e^{-x}}{1+nx} dx$$

que l'on majore à nouveau : pour tout $x > 0 : 1+nx > nx$ donc $\frac{n}{1+nx} \leq \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$ d'où

$$n \frac{1-e^{-x}}{1+nx} \leq f(x)$$

et comme intégrales de fonctions continues par morceaux, (ou en vérifiant l'inégalité également pour $x = 0$)

$$0 \leq \int_0^1 n \frac{1-e^{-x}}{1+nx} dx \leq \int_0^1 f(x) dx$$

car $1 - e^{-x} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\text{Conclusion : } \boxed{0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx}$$

4. On a finalement

$$0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

$\int_0^1 f(x) dx$ étant une constante par rapport à n . Donc

$$0 \leq 1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \frac{\int_0^1 f(x) dx}{\ln(n+1)}$$

et par encadrement, $1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \rightarrow 0$ et $\frac{u_n}{\ln(n+1)} \rightarrow 1$

$$\text{Conclusion : } \boxed{u_n \sim \ln(n+1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$$

Exercice 2

Etude d'un endomorphisme donné par son expression analytique

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère l'endomorphisme f défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, t) = (3x + y - z - 3t, 2x + 2y - z - 3t, 2x + y - 3t, 2x + y - z + mt)$$

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

$$f(e_1) = (3, 2, 2, 2) \quad f(e_2) = (1, 2, 1, 1) \quad f(e_3) = (-1, -1, 0, -1) \quad f(e_4) = (-3, -3, -3, m) \text{ donc}$$

$$\text{la matrice de } f \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}^4 \text{ est } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

$$2. \text{rg}(\varphi) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 4m+9 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 12m+24 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } m = -2 \text{ alors } \text{rg}(f) = 3 \text{ sinon } \text{rg}(f) = 4}$

3. On pose $u_1 = (3, 2, 2, 2)$ $u_2 = (0, 4, 1, 1)$ $u_3 = (0, 0, 3, -1)$ $u_4 = (0, 0, 0, m+2)$.

• Si $m = -2$, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre, génératrice de $\text{Im } \varphi$ d'après le calcul précédent donc

forme une base de $\text{Im } \varphi$.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi = 1$

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker } \varphi \iff \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} 3x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + 2y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 2t = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = t$$

donc $\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))}$ dans la suite on pose $u_5 = (1, 1, 1, 1)$

• Si $m \neq -2$, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre, génératrice de $\text{Im } \varphi$ d'après le calcul précédent donc forme une base de $\text{Im } \varphi$.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \text{Ker } \varphi = 0$ alors $\boxed{\text{Ker } \varphi = \{(0, 0, 0, 0)\}}$

4. • Si $m \neq -2$ alors $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow f$ est injective. Or $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ alors il y a équivalence avec

f est surjective et donc f est bijective.

- Si $m = -2$ alors $\text{Ker } \varphi \neq \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow f$ n'est pas injective. Or $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ alors il y a équivalence avec f n'est pas surjective et donc f n'est pas bijective.

5. Dans la suite on pose $m = -2$

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, u = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_5$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 3a = d \\ 2a + 4b = d \\ 2a + b + 3c = d \\ 2a + b - c = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} a = \frac{d}{3} \\ b = \frac{d}{12} \\ c = \frac{d}{12} \\ c = \frac{-d}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}}.$$

6. D'après la formule de Grassmann, $\dim(\text{Im } f + \dim \text{Ker } f) = 4 = \dim(\text{Im } f) + \dim \text{Ker}(f) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } f) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ or $\text{Im } f + \dim \text{Ker } f \subset \mathbb{R}^4$ donc $\text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \mathbb{R}^4$.

Comme $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$ alors $\boxed{\text{Im}(f) \text{ et } \text{Ker}(f) \text{ sont supplémentaires.}}$

$$7. u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}(f - Id) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y - z - 3t = 0$$

On trouve donc l'équation d'un hyperplan.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ est un hyperplan.}}$$

8. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (3; 2; 2; 2)$ $v_2 = (0; 4; 1; 1)$ $v_3 = (0; 0; 3; -1)$ $v_4 = (1; 1; 1; 1)$

on retrouve les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis précédemment. Or ils forment une base de $\text{Im } f + \text{Ker } f$ donc de $\mathbb{R}^4$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice de f dans cette base.

De plus en effectuant les calculs $f(v_1) = v_1$ $f(v_2) = v_2$ $f(v_3) = v_3$ puis $f(v_4) = v_4$ car $v_4 \in \text{Ker } f$

$$\text{Ainsi } M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

(a) f étant C^1 , f' est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc bornée.

Donc il existe un réel M tel que, pour tout $x \in [0, 1]$: $|f'(x)| \leq M$

Et l'inégalité des accroissements finis donne alors pour tout $x, y \in [0, 1]$

$$\text{Conclusion : } \boxed{|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n - 1]]$, on a $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n} \in [0, 1]$

Donc $\forall t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a t et $\frac{k}{n} \in [0, 1]$ donc $|f(t) - f(\frac{k}{n})| \leq M(t - \frac{k}{n})$

(c) On écrit $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ sous forme d'intégrale : $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(\frac{k}{n}) dt$ intégrale d'une constante.

$$\text{Donc } \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \right| \leq$$

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} |f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)| dt \text{ car } \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n}$$

$$\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M \left(t - \frac{k}{n}\right) dt = \left[\frac{M}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{2n^2}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [[0, n - 1]], \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}}$$

(d) On découpe $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt$ et il vient par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

- (e) Et quand $n \rightarrow +\infty$: $\frac{M}{2n} \rightarrow 0$ et par encadrement ($|| \geq 0$) $\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow 0$.

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt.$$

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$

- (a) Méthode : Pour modifier des puissances dans une intégrale, on intègre par parties.

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx \text{ et } I(p+1, q-1) = \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Soit $u'(x) = x^p : u(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} : v(x) = (1-x)^q : v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$
avec u et v C^1 car $q-1 \geq 0$
donc

$$\begin{aligned} I(p, q) &= \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1} \frac{1}{p+1} x^{p+1} dx \\ &= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p+1} dx \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$

- (b) On a alors par récurrence sur q :

$$\text{pour } q=0 : \forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0, 0) = I(p, 0)$$

$$\text{Soit } q \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$$

$$\text{alors } I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q) \text{ car } q+1 \geq 1 \text{ donc (HR)}$$

$$\begin{aligned} I(p, q+1) &= \frac{q+1}{p+1} \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \\ &= \frac{p!(q+1)!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) \end{aligned}$$

et par récurrence,

$$\text{Conclusion : } \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$

- (c) On a $I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} dx = \left[\frac{1}{p+q+1} x^{p+q+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$ donc

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \frac{1}{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q)!}$$

$$\text{Conclusion : } \forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. Informatique.

Compléter la déclaration récursive suivante afin qu'elle permette le calcul de $I(p, q)$:

On utilise la relation de récurrence $I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ initialisée par $I(p, 0) = \frac{1}{p+1}$ si $q=0$.

```
Function i(p, q : integer) : real ;
Begin
If q = 0 then i := 1/(p+1) else i:=q/(p+1)*i(p+1,q-1);
End ;
```