

Devoir Maison 15

Pour le lundi 30 mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ l'ordre 2, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ ; En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$.
Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.
3. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

4. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Étude d'un endomorphisme donné par son expression analytique

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère l'endomorphisme f défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, t) = (3x + y - z - 3t, 2x + 2y - z - 3t, 2x + y - 3t, 2x + y - z + mt)$$

1. Vérifier que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

2. Déterminer le rang de f suivant les valeurs du réel m .
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Dans la suite on pose $m = -2$
5. Déterminer $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.
6. Que peut-on en déduire concernant $\text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$?
7. Justifier que $\text{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^4})$ est un hyperplan.
8. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (3; 2; 2; 2)$ $v_2 = (0; 4; 1; 1)$ $v_3 = (0; 0; 3; -1)$ $v_4 = (1; 1; 1; 1)$
 Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 3

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$
 - (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$
 - (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

- (d) En sommant la relation précédente, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

- (e) Conclure finalement que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose

$$I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

- (a) Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
- (b) En déduire que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.
- (c) Déterminer $I(p+q, 0)$ et montrer finalement que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

3. Informatique.

Écrire une première fonction Python qui calcule un factoriel puis une seconde fonction Python qui calcule $I(p, q)$ pour tout $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.