# Devoir Maison 14

Pour le 19 février 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**Exercice 1**

1. $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi_n : \begin{cases} ]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}}\, dt \end{cases}$
   (a) Montrer que $\varphi_n$ est définie, monotone.
   (b) Justifier que $\varphi_n$ est dérivable et calculer sa dérivée.
   Confirmer le sens de variation obtenu au **1-a**.
2. Montrer : $\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt$.
3. Soit $\omega_k = (2k+1)\frac{\pi}{2\,n}$ .
   (a) Décomposer[1] en éléments simples dans $\mathbb{C}(t)$ la fraction $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$ .
   (b) En déduire que $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2\,t\cos\omega_k + 1}$.
   (c) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2\,t\,\cos\omega_k + 1}\, dt = \pi - \omega_k$ .
4. (a) Montrer que pour tout réel $\theta$ non congru à 0 modulo $\pi$,
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\big((2\,k+1)\theta\big) = \frac{\sin(2\,n\theta)}{2\,\sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)\,\theta\big) = \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$
   (b) Utiliser ce qui précède (et une dérivation) pour trouver les expressions de
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\omega_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \, \sin\omega_k$$
   (c) En déduire la valeur exacte de $\lim_{x\to 0^+} \varphi_n(x)$ .

1. On trouve $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-\frac{i}{n}\,\sin\omega_k}{t-e^{i\,\omega_k}}$