Devoir Maison 14 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^{2n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ceci prouve que $\boxed{\varphi_n \text{ est définie sur }]0,1]}$

D'autre part, f est positive donc

$$0 < x < x' \leqslant 1 \Rightarrow x < x' \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \Rightarrow \int_{x'}^{1/x'} f \leqslant \int_x^{1/x} f$$

(les bornes sont dans l'ordre usuel). Ceci prouve que $\boxed{\varphi_n \text{ est décroissante sur }]0,1]}$

(b) Étant continue, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Si F est une de ces primitives, nous avons $\varphi_n(x) = [F(t)]_x^{1/x} = F(\frac{1}{x}) - F(x)$. Ceci prouve que φ_n est dérivable (somme et composée de fonctions dérivables), avec

$$\varphi'_n(x) = -\frac{1}{x^2} F'(\frac{1}{x}) - F'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} - \frac{1}{x^{2n}+1}$$

$$\boxed{\varphi_n \text{ est dérivable et } \varphi'_n(x) = -\frac{x^{2n-2}+1}{x^{2n}+1}}$$

φ'_n étant négative, ceci confirme que φ_n est décroissante.

2. *Présentons deux méthodes différentes :*

méthode par les dérivées : pour les mêmes raisons que **1-b** :

— $\psi(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt = G(1) - G(x)$ où $G'(t) = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$ montre que $\psi'(x) = -G'(x) = -\frac{1+x^{2n-2}}{1+x^{2n}} = \varphi'_n(x)$

— $\rho(x) = \frac{1}{2}\int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{1}{2}\left(G(\frac{1}{x}) - G(x)\right)$ qui montre que

$$\rho'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}G'(\frac{1}{x}) - G'(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\frac{(x^{2n-2}+1)\,x^{2n}}{x^{2n-2}\,(x^{2n}+1)} + \frac{1+x^{2n-2}}{1+x^{2n}}\right) = \varphi'_n(x)$$

— Sur l'intervalle $]0,1]$, φ_n, ψ et ρ ont des dérivées égales et vérifient $\varphi_n(1) = \psi(1) = \rho(1) = 0$: elles sont égales.

$$\boxed{\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{1}{2}\int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt}$$

méthode par changement de variable : (la classe des fonctions le permet)

écrivons $\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^{2n}} + \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}}$, et effectuons, dans la deuxième intégrale, le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{1}{u^2}\,du$:

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}} = \int_1^x \frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{1+(\frac{1}{u})^{2n}} = \int_x^1 \frac{u^{2n-2}\,du}{u^{2n}+1}$$

Par linéarité : $\boxed{\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt}$

Le même changement sur l'intervalle $\left[x, \frac{1}{x}\right]$ donne $\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt$ d'où

$$2\,\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}}\,dt + \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt$$

Toujours par linéarité : $\boxed{\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt}$

3. (a) La fraction $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{N(t)}{D(t)}$ est de degré négatif (représentant irréductible). Ses pôles sont les racines d'ordre $2n$ de -1 : $\alpha_k = e^{i\,(1+2k)\pi/2n} = e^{i\,\omega_k}$, $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

Les pôles sont simples donc

$$\frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\beta_k}{t-\alpha_k}, \qquad \text{où} \qquad \beta_k = \frac{N(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} = \frac{1+\alpha_k^{2n-2}}{2\,n\,\alpha_k^{2n-1}}$$

En remarquant que $\alpha_k^{2n-1} = \frac{\alpha_k^{2n}}{\alpha_k} = -\frac{1}{\alpha_k}$, *et* $\alpha_k^{2n-2} = -\frac{1}{\alpha_k^2}$, il vient

$$\beta_k = \frac{1-\frac{1}{\alpha_k^2}}{-2\,n\,\frac{1}{\alpha_k}} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k\right) = \frac{1}{2n}\left(\overline{\alpha_k} - \alpha_k\right) = -\frac{i}{n}\sin\omega_k$$

$$\boxed{\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-\frac{i}{n}\sin\omega_k}{t-e^{i\,\omega_k}}}$$

(b) En regroupant les conjugués ($\alpha_k = \overline{\alpha_{2\,n-1-k}}$), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} &= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\omega_k}{t-\alpha_k} + \frac{\sin\omega_{2n-1-k}}{t-\overline{\alpha_k}}\right) \\
&= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\omega_k}{t-\alpha_k} - \frac{\sin\omega_k}{t-\overline{\alpha_k}}\right) \\
&= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k\,\frac{\alpha_k - \overline{\alpha_k}}{t^2 - (\alpha_k + \overline{\alpha_k})\,t + \alpha_k\,\overline{\alpha_k}}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\boxed{\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\cos\omega_k\,t+1}}$

(c) Le calcul d'une primitive est classique :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\,t\,\cos\omega_k+1}\,dt &= \int \frac{\sin^2\omega_k}{(t-\cos\omega_k)^2+\sin^2\omega_k}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\left(\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right)^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{\sin\omega_k}{u^2+1}\,du \quad \text{avec } u=\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}, \quad du=\frac{dt}{\sin\omega_k} \\
&= \sin\omega_k\cdot \operatorname{Arctan}\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}
\end{aligned}$$

Déterminons les limites :

— $\boxed{t\to 0}$ $\operatorname{Arctan}\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\to \operatorname{Arctan}\frac{-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}=\operatorname{Arctan}\left(\tan(\omega_k-\frac{\pi}{2})\right)=\omega_k-\frac{\pi}{2}$ (car $\omega_k-\frac{\pi}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puisque $0\leqslant k\leqslant n-1 \Rightarrow \omega_k\in]0,\pi[$)

— $\boxed{t\to+\infty}$ $\operatorname{Arctan}\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\to\frac{\pi}{2}$ (dans les mêmes conditions $\sin\omega_k>0$)

— Ainsi, quand x tend vers 0 :

$$\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\,t\,\cos\omega_k+1}\,dt=\sin\omega_k\Bigg(\underbrace{\operatorname{Arctan}\frac{\frac{1}{x}-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}}_{\to\pi/2}-\underbrace{\operatorname{Arctan}\frac{x-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}}_{\to\omega_k-\pi/2}\Bigg)$$

montre que $\boxed{\lim_{x\to0^+}\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\,t\,\cos\omega_k+1}\,dt=(\pi-\omega_k)\,\sin\omega_k}$

4. (a) Soit $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$, $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left((2\,k+1)\theta\right)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2\,k+1)\theta\right)$ sont les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k=0}^{n+1}e^{\,i\,(2k+1)\theta}$, somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\,i\,2\theta}\neq 1$. Ainsi :

$$C_n+i\,S_n=\frac{e^{\,i\,(2n+1)\theta}-e^{\,i\,\theta}}{e^{\,i\,2\theta}-1}=e^{\,i\,\theta}\frac{e^{\,i\,n\theta}(e^{\,i\,n\theta}-e^{-i\,n\theta})}{e^{\,i\,\theta}(e^{\,i\,\theta}-e^{-i\,\theta})}=e^{\,i\,n\theta}\frac{2\,i\,\sin(n\,\theta)}{2\,i\,\sin(\theta)}$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left((2\,k+1)\theta\right)=\frac{\sin(2\,n\theta)}{2\,\sin(\theta)} \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2\,k+1)\theta\right)=\frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}}$$

(b) En dérivant la première égalité par rapport à θ, on obtient (après changement de signe)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\sin\left((2\,k+1)\theta\right)=\frac{\sin(2n\theta)\,\cos(\theta)-2n\,\cos(2\,n\theta)\,\sin(\theta)}{2\,\sin^2(\theta)}$$

Avec $\theta=\frac{\pi}{2\,n}$, ce qui précède donne

— $\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2\,n}=\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2\,n})}{\sin\frac{\pi}{2\,n}}$ soit $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\,n}}}$

— $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\,\sin(2k+1)\frac{\pi}{2\,n}=\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n})\,\cos(\frac{\pi}{2n})-2n\,\cos(\frac{2n\pi}{2n})\,\sin(\frac{\pi}{2n})}{2\,\sin^2(\frac{\pi}{2n})}$

soit, en multipliant par $\frac{\pi}{2n}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\,\sin\omega_k=\frac{\pi}{2\,\sin\frac{\pi}{2\,n}}}$

(c) Comme $\varphi_n(x)=\frac{1}{2}\int_x^{1/x}\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt=\frac{1}{2}\int_x^{1/x}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\,t\,\cos\omega_k+1}\,dt$ $=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\,t\,\cos\omega_k+1}\,dt}_{\to(\pi-\omega_k)\,\sin\omega_k}$ nous avons $\lim_{x\to0^+}\varphi_n(x)=$ $\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\,\sin\omega_k$ $=\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}-\frac{1}{n}\frac{\pi}{2\,\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\pi}{2\,n\,\sin\frac{\pi}{2n}}$

Conclusion $\boxed{\lim_{x\to0^+}\varphi_n(x)=\frac{\pi}{2\,n\,\sin\frac{\pi}{2n}}}$