

Devoir Maison 14 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a $[J(a, b)]^n =$
- $$\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Procédons par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\begin{pmatrix} a^1 & 1a^0 & 0 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 0 & 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = [J(a, b)]^1$,

ce qui démontre que la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la relation est vraie au rang n et démontrons la au rang $n + 1$. On a

$$\begin{aligned} [J(a, b)]^{n+1} &= [J(a, b)]^n \cdot J(a, b) \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation au rang $n + 1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [J(a, b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id} = O$.

On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} -14 & 33 & -18 \\ 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne, après calculs,

$$M^3 + M^2 - 5M + 3I_3 = 0.$$

Or, comme M est la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{E}$, on sait, d'après le cours, que $M^3 + M^2 - 5M + 3I_3$ et la matrice de $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id}$ dans cette même base. Ainsi, la relation matricielle ci-dessus se traduit par

$$\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id} = O.$$

- (b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera.

On constate que 1 est une racine évidente de Π . De plus, $\Pi'(X) = 3X^2 + 2X - 5$ d'où $\Pi'(1) = 0$. Ainsi, d'après le cours, on peut affirmer que 1 est une racine (au moins) double de Π . Par suite, on peut factoriser $\Pi(X)$ sous la forme $\Pi(X) = 1(X - 1)^2(X - a)$ où a désigne la dernière racine de Π . En identifiant les coefficients constants dans les deux expressions de $\Pi(X)$, on obtient $-a = 3$, d'où $a = -3$. Par suite,

$$\Pi(X) \text{ admet } 1 \text{ comme racine double et } -3 \text{ comme racine simple.}$$

- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.

Comme $\Phi(u) = \lambda u$, on a $\Phi^2(u) = \Phi(\Phi(u)) = \Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u) = \lambda^2 u$ et $\Phi^3(u) = \Phi(\Phi^2(u)) = \Phi(\lambda^2 u) = \lambda^2\Phi(u) = \lambda^3 u$. Par suite, comme $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id} = O$, on a

$$0 = (\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id})(u) = \Phi^3(u) + \Phi^2(u) - 5\Phi(u) + 3\text{Id}(u) = \lambda^3 u + \lambda^2 u - 5\lambda u + 3u = (\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3)u$$

d'où $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ puisque $u \neq 0$. Donc $\Pi(\lambda) = 0$.

3. (a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.

La matrice de $\Phi + 3\text{Id}$ dans la base $\mathcal{E}$ est $M + 3I_3$. Pour trouver le noyau de $\Phi + 3\text{Id}$, il suffit de chercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi + 3\text{Id})(u) = 0$,

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 (M + 3I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} 2a + 5b - 3c = 0 & (L_1) \\ \boxed{a} + 3b = 0 & (L_2) \\ b + 3c = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -b - 3c = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1 - 2L_2) \\ \boxed{a} + 3b = 0 & (L_2) \\ \boxed{b} + 3c = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1 + L_3) \\ \boxed{a} + 3b = 0 & (L_2) \\ \boxed{b} + 3c = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = 9c \\ b = -3c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Donc

$\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(9, -3, 1)$.

- (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\Phi - \text{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.

La matrice de $\Phi - \text{Id}$ dans la base canonique est $M - I_3$. Pour déterminer le noyau de $\Phi - \text{Id}$, il suffit de rechercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi - \text{Id})(u) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 (M - I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 &\iff \begin{cases} -2a + 5b - 3c = 0 & (L_1) \\ \boxed{a} - b = 0 & (L_2) \\ b - c = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 3b - 3c = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1 + 2L_2) \\ \boxed{a} - b = 0 & (L_2) \\ b - \boxed{-c} = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1 + 3L_3) \\ \boxed{a} - b = 0 & (L_2) \\ b - \boxed{-c} = 0 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Donc

$\text{Ker}(\Phi - \text{Id})$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

4. (a) Trouver $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, tel que $\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^3 e_i$.

Posons $x \stackrel{\text{def}}{=} (a, b, c)$. On a

$$\begin{aligned}
 (\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i) &\iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2a + 5b - 3c = 1 & (L_1) \\ \boxed{a} - b = 1 & (L_2) \\ b - c = 1 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 3b - 3c = 3 & (L_1) \leftarrow (L_1 + 2L_2) \\ \boxed{a} - b = 1 & (L_2) \\ \boxed{b} - c = 1 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = 0 & (L_1) \leftarrow (L_1 - 3L_3) \\ \boxed{a} - b = 1 & (L_2) \\ \boxed{b} - c = 1 & (L_3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a = 2 + c \\ b = 1 + c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Donc, pour choisir une solution de ce système dont la dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ est égale à 1, il faut et suffit de prendre $\lambda = 1$, ce qui donne $(a, b, c) = (3, 2, 1)$. Donc

$$\boxed{x = (3, 2, 1)}.$$

- (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \text{Ker}([\Phi - \text{Id}]^2)$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.

Comme $\text{Ker}(\Phi - \text{Id}) \subset \text{Ker}([\Phi - \text{Id}]^2)$, le vecteur directeur $(1, 1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ de la droite $\text{Ker}(\Phi - \text{Id})$ appartient aussi à E . D'autre part, le vecteur x de la question précédente vérifie $\Phi(x) = x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, donc $\Phi(x) - x \in \text{Ker}(\Phi - \text{Id})$. Cela signifie que $x \in E$. Nous disposons ainsi de deux vecteurs : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ et $x = (3, 2, 1)$, qui appartiennent à E . Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de E .

Par ailleurs, la matrice de $(\Phi - \text{Id})^2$ dans la base canonique est

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\text{rang}((M - I_3)^2) = \text{rang} \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ \boxed{1} & -2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

ce qui implique, d'après le théorème du rang, que $\dim E = 2$.

Les deux vecteurs $e_1 + e_2 + e_3$ et x forment donc une famille libre de deux vecteurs du sous-espace E qui est de dimension 2, ce qui implique que

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, x) = ((1, 1, 1), (3, 2, 1)) \text{ est une base de } E.$$

(c) Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$.

Soit $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (3, 2, 1)$. $\phi(u_1) = u_1$ et $\phi(u_2) = (4, 3, 2) = u_1 + u_2$. Or $\forall u \in E, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = au_1 + bu_2$ d'où $\phi(u) = (a + b)u_1 + bu_2$ alors $\phi(u) \in E$

Donc

$$\Phi(E) \subset E.$$

Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$, il suffit de prouver que $E \cap \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id}) = \{0\}$ et $\dim E + \dim(\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})) = 3$. Cette dernière relation est clairement vérifiée puisque l'on sait que $\dim E = 2$ d'après la question précédente et $\dim(\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})) = 1$ d'après la question 3.a). Par ailleurs, si $u \in E \cap \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$, alors $\Phi^2(u) = u$ et $\Phi(u) = 3u$, donc $u = \Phi^2(u) = \Phi(\Phi(u)) = \Phi(3u) = 3\Phi(u) = 9u$, ce qui implique que $u = 0$, d'où $E \cap \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id}) = \{0\}$. Par conséquent,

$$\mathbb{R}^3 = E \oplus \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id}).$$

5. (a) Donner une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base E égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ vaut $M' = J(1, -3)$.

Comme $\mathbb{R}^3 = E \oplus \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$, on sait, d'après le cours, que la réunion d'une base de E et d'une base de $\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Par suite, la famille de vecteurs $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (3, 2, 1), (9, -3, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Or $\Phi(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$, $\Phi(3, 2, 1) = (1, 1, 1) + (3, 2, 1)$ et $\Phi(9, -3, 1) = -3(9, -3, 1)$, donc la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J(1; -3).$$

Par conséquent,

dans la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (3, 2, 1), (9, -3, 1))$, la matrice de Φ est $M' = J(1, -3)$.

(b) Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n , M' , P et P^{-1} où P est une matrice bien choisie. Calculer la première colonne de M^n .

On sait, d'après le cours et la question précédente, que si P désigne la matrice de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{E}$, on a $M = PM'P^{-1}$. Par suite

$$\begin{aligned} M^n &= \underbrace{(PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) \dots (PM'P^{-1})}_{n \text{ facteurs } PM'P^{-1}} \\ &= PM' \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} PM' \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} PM'P^{-1} \dots PM' \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} PM'P^{-1} \\ &= P(M')^n P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$M^n = P(M')^n P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons P^{-1} . Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} PX = Y &\iff \begin{cases} \boxed{x} + 3y + 9z = a & (L_1) \\ x + 2y - 3z = b & (L_2) \\ x + y + z = c & (L_3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{x} + 3y + 9z = a & (L_1) \\ -y - 12z = b - a & (L_2) \leftarrow (L_2 - L_1) \\ \boxed{-2y} - 8z = c - a & (L_3) \leftarrow (L_3 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{x} + 3y + 9z = a & (L_1) \\ \boxed{-2y} + 16z = a - 2b + c & (L_2) \leftarrow (-2L_2 + L_3) \\ \boxed{-2y} - 8z = c - a & (L_3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{12}a - \frac{6}{12}b + \frac{27}{16}c \\ y = \frac{4}{16}a + \frac{8}{16}b - \frac{12}{16}c \\ z = \frac{1}{16}a - \frac{2}{16}b + \frac{1}{16}c \end{cases} \end{aligned}$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait, d'après la question 1, que

$$(M')^n = [F(1; -3)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} M^n &= P(M')^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 + 4n & \clubsuit & \heartsuit \\ 4 & \diamondsuit & \spadesuit \\ (-3)^n & \blacksquare & \square \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 + 4n + 9(-3)^n & \oplus & \ominus \\ 3 + 4n - 3(-3)^n & \otimes & \odot \\ -1 + 4n + (-3)^n & \circledast & \oslash \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre que

la première colonne de M^n est $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 + 4n + 9(-3)^n \\ 3 + 4n - 3(-3)^n \\ -1 + 4n + (-3)^n \end{pmatrix}.$