

Devoir Maison 14

Pour le lundi 16 Mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Dans ce problème, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et O l'application nulle. Pour tout couple de nombres réels (a, b) , on note $J(a, b)$ la matrice

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a

$$[J(a, b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\text{Id} = O$.
 (b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera.
 (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.
3. (a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
 (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\Phi - \text{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
4. (a) Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, vérifiant $\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^3 e_i$.
 (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \text{Ker}([\Phi - \text{Id}]^2)$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
 (c) Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \text{Ker}(\Phi + 3\text{Id})$.
5. (a) Donner une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ vaut $M' = J(1, -3)$.
 (b) Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n , M' , P et P^{-1} où P est une matrice bien choisie. Calculer la première colonne de M^n .