Devoir Maison 13

Pour le 12 février 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$
   (b) On pose alors $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$
   Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
2. (a) Montrer que f est continue sur D.
   (b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Etudier le signe de $f(x)$.
5. Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$
   (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}dt$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$..

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[\ ,\ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}dt$$

1. Étude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe C^1sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\underset{x\to+\infty}{lim} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n).
   (a) Montrer que $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 ,on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}})$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$.