Devoir Maison 13 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) On étudie les variations de $g(x) = x - \ln(x)$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+ \searrow$	1	$\nearrow +$	

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : g(x) > 0}$

(b) f est définie en 0 et en x tel que $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [0, +\infty[}$

2. (a) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

En 0 : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)(-1 + x/\ln(x))} \\ &= \frac{1}{-1 + x/\ln(x)} \to -1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

(b) Pour $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(x) + x}{x(x - \ln(x))} \\ &= \frac{1}{x - \ln(x)} \to 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } f'_d(0) = 0}$

3. (a) Sur $]0, +\infty[$ on a $x - \ln(x) \neq 0$ donc f y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x - \ln(x))\frac{1}{x} - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} \\ &= \frac{x - \ln(x) - \ln(x)(x-1)}{x(x - \ln(x))^2} \\ &= \frac{x - x\ln(x)}{x(x - \ln(x))^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} \end{aligned}$$

(b) En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{x(1 - \ln(x)/x)} \\ &\to 0 \text{ car } \ln(x) = o(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$

(c) On a alors :

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln(x)$		$+ \searrow$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Comme $x - \ln(x) > 0$ le signe de $f(x)$ est celui de $\ln(x)$ (et négatif en 0)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	

5. Pour tout réel x élément de D on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x) = f(x)$ et donc F' est continue.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$ et son sens de variation est donné par le signe de f :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

(b) Comme $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$ pour $t \geq e$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge alors par minoration de fonction positive $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge et

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = +\infty}$

N.B. on pouvait aussi primitiver (car $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln(x)$ par rapport à x) en $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

(c) On a un équivalent en $+\infty$ en factorisant :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} &= \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{1-\ln(t)/t} \\ &\sim \frac{\ln(t)}{t} \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 1$. Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}dt$ diverge également et $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt = +\infty$

Et donc

Conclusion : $\boxed{\lim_{+\infty} F = +\infty}$

Pour tracer une jolie courbe représentative, il faudrait en plus la direction asymptotique.

Exercice 2

1. $\forall x \in [n,+\infty[\ ,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}dt.$

(a) D'après le théorème fondamental de l'intégration , la fonction $t \to e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[0,+\infty[$, f_n est sa primitive sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en $x=n$. f_n est donc de classe C^1(en tant que primitive d'une fonction continue) et

$\boxed{\forall x \in [n,+\infty[\ ,\ f_n'(x) = e^{\sqrt{x}}}$.

Sa dérivée étant strictement positive , $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n,+\infty[}$.

(b) $\forall x \in [n,+\infty[\ ,\ e^{\sqrt{t}} > 1$.

En intégrant sur $[n,x]$ (avec $n \leq x$) ,on obtient $\forall x \in [n,+\infty[\ ,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}dt > \int_n^x 1dt = x-n$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-n) = +\infty$, par minoration , on a aussi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.

(c) Le théorème de la bijection : f_n est continue et strictement croissante sur $[n,+\infty[$, $f_n(n) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc f_n réalise une bijection de $[n,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

Comme $1 \in [0,+\infty[$, il admet un unique antécédent par f_n ,noté u_n et appartenant à $[n,+\infty[$, tel que $\boxed{f_n(u_n) = 1}$.

2. Etude de la suite (u_n)

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [n,+\infty[$, donc $u_n \geq n$ et , par minoration : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

(b) $f_n(u_n) = \displaystyle\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}dt = 1.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq n$ et :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in [n,u_n]\ : & e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}} & . \\ \text{Comme } n \leq u_n\ : & \displaystyle\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}}dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}}dt & , \\ \text{et donc :} & (u_n-n).e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) = 1 \leq (u_n-n).e^{\sqrt{u_n}} & . \end{array}$$

La première inégalité fournit $(u_n-n).e^{\sqrt{n}} \leq 1$ et $\underline{(u_n-n) \leq e^{-\sqrt{n}}}$ alors que la deuxième s'écrit $1 \leq (u_n-n).e^{\sqrt{u_n}}$ et donc $\underline{e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n-n)}$.

On a donc bien encadré $u_n - n$: $\boxed{e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n-n) \leq e^{-\sqrt{n}}}$.

3. $v_n = u_n - n$.

(a) D'après 2b) : $0 \leq (u_n-n) \leq e^{-\sqrt{n}}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$,on a par encadrement aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-n) = 0}$.

(b) Par équivalence :

$$\begin{array}{rcll} \forall x \geq -1\ : & \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2} & & \\ \Leftrightarrow & 1+x \leq (1+\frac{x}{2})^2 & & (\text{croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ \Leftrightarrow & 1+x \leq 1+x+\frac{x^2}{4} & & \text{qui est vérifiée !} \end{array}$$

(c) Toujours par équivalence :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}*\ : & e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}}.exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) & \\ \Leftrightarrow & e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} \geq exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) & (\text{croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{u_n}-\sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} & (\text{décroissance de } t \to e^{-t}\ ) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{v_n+n} \leq \sqrt{n}+\frac{v_n}{2\sqrt{n}} & (u_n = v_n+n) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{v_n}{n}+1} \leq 1+\frac{v_n}{2.n} & (\text{division par } \sqrt{n} > 0) \end{array}$$

Comme $\frac{v_n}{n} \geq 0$, la dernière inégalité est vérifiée en vertu du 4b) et donc la première aussi ! !

(d) On divise l'encadrement obtenu en 2b) par $e^{-\sqrt{n}}$, ce qui donne $\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n-n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$.

Et donc , en utilisant 4c) : $exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n-n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1$, qui fournit (par encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(u_n-n)}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$.

par conséquent : $\boxed{u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}}$.