Devoir Maison 13 - Eléments de Correction

Exercice 1
Corrigé ECRICOME 1996 par Pierre Veuillez

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$f(x) = \ln x + x$$

1.1. Existence des racines de (E_n)

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$
   En 0 : $f(x) = \ln(x) + x \to -\infty$
   En $+\infty$: $f(x) \to +\infty$.
   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc bijective de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = n$ a une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   Et comme $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$ alors $x_n < x_{n+1}$
   Conclusion : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$
2. On a $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$
   Conclusion : $\boxed{x_1 = 1}$
   Pour x_2, on procède par encadrement :
   $f(1.55) \simeq 1.98 \leq 2 = f(x_2) < f(1.56)$ donc (f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et les termes s'y trouvent).
   Conclusion : $\boxed{\frac{155}{100} \leq x_2 \leq \frac{156}{100}}$ valeur approchée 1.56
3. Pour la courbe représentative, on détermine les branches infinie et les tangentes :
   On a $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(x)}{x} \to 1$ et $f(x) - x = \ln(x) \to +\infty$
   Donc une branche parabolique de direction $y = x$.
   tangente en 1 de pente $f'(1) = 2$
   en $x_2 \simeq 1.5$ la pente est de $f'(x_2) \simeq 1.6$
   et asymptote verticale en 0

1.2. Etude de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. On étudie les variations de la différence :
   $g(x) = \ln(x) - x$est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
   $$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$
   qui est du signe de $1 - x$

x	0		1	
$1-x$	$\|$	$+$	0	$-$ affine
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\|$	$\nearrow -$	-1	$\searrow -$

   donc $g(x) < 0$ et
   Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \qquad \ln x < x.}$
2. On compare les images :
   $$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2}\right) &= \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \\ f(n) &= \ln(n) + n \geq n \text{ car } n \geq 1 \end{aligned}$$
   donc $f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n)$ et comme f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $\frac{n}{2}$, x_n et n en sont éléments,
   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad \frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n}$
3. Enfin, $\frac{n}{2} \to +\infty$ donc par minoration
   Conclusion : $\boxed{x_n \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty\,?}$

1.3. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. L'encadrement précédent ne donne
   $$\frac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$
   avec
   $$\frac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(2)}{n} \to 0$$
   car $\ln(n) = o(n)$ et par encadrement ,
   Conclusion : $\boxed{\frac{\ln(x_n)}{n} \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$

On réutilisae alors la relation de définition de x_n : $\ln(x_n) + x_n = n$

Donc $x_n = n - \ln(x_n) = n\left(1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}\right)$ avec $() \to 1$ et on a donc

Conclusion : $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$

(on pouvait aussi en déduire la lmite de x_n/n)

2. **Piège :**l'équivalent d'une somme n'est pas la somme des équivalents !

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= n + 1 - \ln(x_{n+1}) - n + \ln(x_n) \\ &= 1 + \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \text{ et} \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} &\sim \frac{n}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{x_{n+1} - x_n \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$

3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}.$$

(a) Pour tout $n > 0$ (pour le $\ln(n)$)

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n - x_n}{\ln n} - 1 \\ &= \frac{n - x_n - \ln(n)}{\ln n} \text{ avec } x_n = n - \ln(x_n) \\ &= \frac{n - n + \ln(x_n) - \ln(n)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}}$

(b) Comme $x_n \sim n$ alors $\dfrac{x_n}{n} \to 1$ et $\dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \to 0$ donc

Conclusion : $\boxed{u_n \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

(c) Il faut ici patouiller longtemps avant de trouver une bonne idée :

On a donc $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n} \to 1$ donc $n - x_n \sim \ln(n)$ et

Conclusion : $\boxed{\ln(x_n) \sim \ln(n)}$ ce qui n'était pas demandé.

Puis :

$$1 - u_n = -\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$$

et comme $\dfrac{x_n}{n} \to 1$ et que $\ln(x) \sim x - 1$ quand $x \to 1$ alors

$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \sim \frac{x_n}{n} - 1 = \frac{x_n - n}{n} = \frac{-\ln(x_n)}{n}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 - u_n &\sim -\frac{-\ln(x_n)}{n\ln(n)} \\ &\sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

4. Il existe donc ε tendant vers 0 telle que $1 - u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et} \\ \frac{n - x_n}{\ln n} &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et} \\ n - x_n &= \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et} \\ x_n &= n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2
Partie -A-

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2\,x\,y = 1$

1. $\boxed{\text{(E) est une équation linéaire du premier ordre avec second membre}}$

2. (a) C'est une démonstration par récurrence.
   - *Amorce* : par définition d'une solution d'une équation différentielle : f est dérivable (donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.)
   - *hérédité* : Si f solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^n$, l'égalité $f' = 1 - 2\,\mathrm{Id}\times f$ montre que f' est également de classe $\mathcal{C}^n$ donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ f$ de classe $\mathcal{C}^n$ d'où $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

   (b) On utilise (E) avec $x = 0$, ce qui donne $f'(0) + 2\times 0\times f(0) = 1$ d'où $\boxed{f'(0) = 1}$

3. L'application identique (Id) et f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut utiliser la formule de Leibniz à tout ordre. En dérivant l'égalité (E) à l'ordre $k+1$, il vient

$$f^{(k+2)} + 2\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\,\mathrm{Id}^{(i)}\,f^{(k+1-i)} = 1^{(k+1)}$$

Comme les dérivées Id : $x\mapsto x$ sont nulles à partir de l'ordre 2, il reste

$$f^{(k+2)} + 2\left(\mathrm{Id}\,f^{(k+1)} + (k+1)\,f^{(k)}\right) = 0$$

donc $\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(k+2)}(x) = -2\,x\,f^{(k+1)}(x) - 2\,(k+1)\,f^{(k)}(x)}$

4. (a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre ce qui prouve que $\boxed{\forall\, p\in\mathbb{N},\ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_p(0)}$

   (b) Dans le développement limité $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k\,x^k + o(x^n)$ nous avons $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

   La question **??** appliquée avec $x = 0$ donne $f^{(k+2)}(0) = -2\,(k+1)\,f^{(k)}(0)$ qui se traduit en $a_{k+2}\,(k+2)! = -2\,a_k\,(k+1)!$ soit $\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ a_{k+2} = -\frac{2}{k+2}\,a_k}$

   Comme $a_1 = f^{(1)}(0) = 1$, on en déduit $a_3 = \frac{-2}{3}$, $a_5 = \frac{(-2)\times(-2)}{5\times 3}$, et, par une récurrence évidente $a_{2k+1} = \frac{(-2)^k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}$. En écrivant

   $3\cdot 5\cdots(2k+1) = \frac{(2k+1)!}{2\cdot 4\cdots(2k)} = \frac{(2k+1)!}{2^k\,k!}$ il vient $\boxed{a_{2k+1} = a_k = \frac{(-4)^k\,k!}{(2k+1)!}}$

   (c) De même $a_0 = f(0)$, $a_2 = \frac{(-2)}{2}\,f(0)$, $a_4 = \frac{(-2)^2}{2\times 4}\,f(0)$, et par récurrence

   $a_{2k} = \frac{(-2)^k}{2\cdot 4\cdots(2k)}\,f(0)$ qui s'écrit $\boxed{a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}\,f(0)}$

Partie -B-

5. L'application : $t\mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\Phi : x\mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ en est une primitive. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme l'exponentielle).

   Ainsi : $D : x\mapsto e^{-x^2}\,\Phi(x)$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$) donc $\boxed{D \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R},}$

   La justification ci-dessus montre que D se dérive en D' telle que

$$D'(x) = (-2\,x)\,\underbrace{e^{-x^2}\,\Phi(x)}_{=\,D(x)} + e^{-x^2}\,\underbrace{e^{x^2}}_{\Phi'(x)}$$

   qui montre que D vérifie : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ D'(x) = -2\,xD(x) + 1$ $\boxed{D \text{ est solution de (E)}}$

6. La fonction $x\mapsto e^{x^2}$ est paire donc $\int_0^x e^{t^2}\,dt = -\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$.

   De plus : $e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$. Nous en déduisons que $\boxed{D \text{ est impaire}}$

   Il est évident que $D(x)$ est du signe $\int_0^x e^{t^2}\,dt$. Comme $e^{t^2} > 0$, l'intégrale est positive si et seulement si $0 < x$ $\boxed{D(x) \text{ est du signe de } x}$

7. Comme $t\mapsto e^{t^2}$ est croissante sur R_+, nous avons <u>pour tout x **positif**</u>

$$0\leqslant t\leqslant x \Rightarrow e^{0^2}\leqslant e^{t^2}\leqslant e^{x^2} \Rightarrow \underbrace{\int_0^x dt}_{=\,x} \leqslant \int_0^x e^{t^2}\,dt \leqslant \underbrace{\int_0^x e^{x^2}\,dt}_{=\,x\,e^{x^2}}$$

   En divisant par $e^{x^2} > 0$ il vient $\boxed{x\geqslant 0 \Rightarrow x\,e^{-x^2}\leqslant D(x)\leqslant x}$

   <u>Pour x **négatif**</u>, nous avons $-x\geqslant 0$ donc $(-x)\,e^{-(-x)^2}\leqslant D(-x)\leqslant -x$. D est impaire. En changeant de signe il vient : $\boxed{x\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant D(x)\leqslant x\,e^{-x^2}}$

8. (a) <u>*Méthode 1 (vérification de la formule)*</u> : il suffit de dériver les deux membres de l'égalité. Les dérivées sont égales donc les deux membres sont égaux à une constante additive près. Comme l'égalité est évidente pour $x = 1$, la constante est nulle d'où le résultat.

   <u>*Méthode 2 (établir la formule)*</u> : on intégre 2 fois par parties

$$\int_1^x \underbrace{\frac{1}{2\,t}}_{u(t)} \underbrace{2\,t\,e^{t^2}}_{v'(t)}\,dt = \left[\frac{1}{2\,t}\,e^{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,e^{t^2}\,dt$$ (u et v de classe $\mathcal{C}^1$)

et $$\int_1^x \underbrace{\frac{1}{4\,t^3}}_{u(t)} \underbrace{2\,t\,e^{t^2}}_{v'(t)}\,dt = \left[\frac{1}{4\,t^3}\,e^{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{3}{4\,t^4}\,e^{t^2}\,dt$$ (u et v de classe $\mathcal{C}^1$)

donne bien $\boxed{\int_1^x e^{t^2} = \frac{e^{x^2}}{2\,x} + \frac{e^{x^2}}{4\,x^3} - \frac{3\,e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}$

(b) Soit $h(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$. Sur $[\,1\,,+\infty\,[$: $h'(x) = \frac{2\,(x^2-1)\,e^{x^2}}{x^3} \geqslant 0$

montre que $\boxed{h \text{ est croissante sur } [\,1\,,+\infty\,[}$

Nous en déduisons

$$1 \leqslant t \leqslant x \Rightarrow \underbrace{\frac{e^{1^2}}{1^2}}_{0\,\leqslant} \leqslant \frac{e^{t^2}}{t^2} \leqslant \underbrace{\frac{e^{x^2}}{x^2}}_{=\,h(x)} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^{t^2}}{t^4} \leqslant h(x)\,\frac{1}{t^2}$$

qu'on intègre de 1 à x $(\,1 \leqslant x\,)$ $\boxed{1 \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt}$

Comme $h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{x}\,\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, en divisant par $\frac{e^{x^2}}{2\,x} > 0$, on obtient :

$$x > 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\frac{e^{x^2}}{2\,x}}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Par pincement, ceci prouve que $\boxed{\text{en } +\infty\,,\ \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2\,x}\right)}$

(c) La question **??** donne $\int_1^x e^{t^2} = \frac{e^{x^2}}{2\,x} + \underbrace{\frac{e^{x^2}}{4\,x^3} - \frac{3\,e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}_{\text{négligeable devant } \frac{e^{x^2}}{2\,x}}$.

puisque, au voisinage de $+\infty$,

$\lhd$ $\frac{e^{x^2}}{4\,x^3} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2\,x}\right)$ (le quotient $\frac{1}{2\,x^2}$ tend vers 0)

$\lhd$ $\frac{3\,e}{4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2\,x}\right)$ (le quotient $\frac{2\,e^{x^2}}{3\,e\,x}$ tend vers 0)

$\lhd$ $\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2\,x}\right)$ (question précédente)

ce qui permet de conclure $\boxed{\text{en } +\infty :\ \int_1^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2\,x}}$

Enfin $D(x) = e^{-x^2}\left(\underbrace{\int_0^1 e^{t^2}\,dt}_{=\,K>0} + \int_1^x e^{t^2}\,dt\right) = K\,e^{-x^2} + e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt$

Or $e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt \sim e^{-x^2}\,\frac{e^{x^2}}{2\,x} = \frac{1}{2\,x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{K\,e^{-x^2}}{\frac{1}{2\,x}} = 0$ montre que $K\,e^{-x^2}$ est négligeable devant $e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt$. Ainsi $\boxed{\text{en } +\infty :\ D(x) \sim \frac{1}{2\,x}}$

9. (a) D étant impaire du signe de x, si D admet un maximum, celui-ci ne peut qu'être sur $[0\,,\ \infty[$. Montrons plus précisément que ce maximum est atteint en $b \in]0,1]$:

•pour x assez grand nous avons $D(x) \leqslant D(1)$

l'équivalent montre que $\lim_{x\to+\infty} D(x) = 0$ donc, avec $\varepsilon = D(1) > 0$ nous avons

$$\exists\ A \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\ x\,,\ x \geqslant A \Rightarrow D(x) < D(1)$$

•D atteint un maximum M sur $[\,0\,,\ A\,]$

D est continue sur $[\,0\,,\ A\,]$ donc $D([\,0\,,\ A\,])$ est un segment $[m, M]$,

et $M \in D([\,0\,,\ A\,]) \Rightarrow \exists\ b \in [\,0\,,\ A\,]\ D(b) = M$

•$M = D(b)$ est le maximum absolu de D sur $\mathbb{R}$

$\triangleright$ $D(1) \leqslant M$ puisque $1 \in [\,0\,,\ A\,]$

En effet, dans le cas contraire nous aurions

$$1 \geqslant A \Rightarrow D(1) < D(1)$$

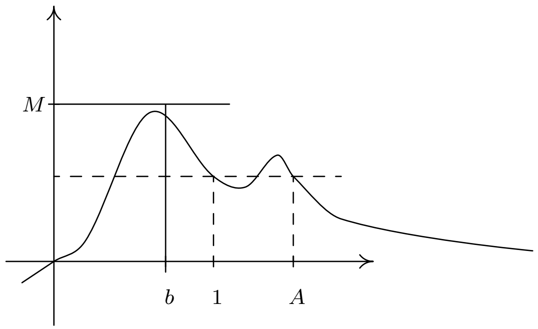
$\triangleright$ M est maximum absolu sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, trois cas sont possibles :

$x < 0$ alors $D(x) \leqslant 0 \leqslant M$

$0 \leqslant x \leqslant A$ alors $D(x) \in D([\,0\,,\ A\,]) \Rightarrow D(x) \leqslant M$

$x > A$ alors $D(x) < D(1) \leqslant M$



De plus, $D(0)=0\neq M$ donc $b>0$ $\boxed{D \text{ atteint son maximum absolu en } b\in\mathbb{R}_+^*}$

(b) La fonction D continue dérivable atteint son maximum en b qui n'est pas une borne de l'intervalle donc $D'(b)=0$.

Comme D est solution de l'équation différentielle (E) nous en déduisons

$$\underbrace{D'(b)}_{=0}+2\,b\,D(b)=1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{M=D(b)=\frac{1}{2\,b}}$$

(c) Si M est atteint en deux points b et b' , nous avons alors $M=D(b)=D(b')$

d'où $\frac{1}{2\,b}=\frac{1}{2\,b'}\Rightarrow b=b'$ $\boxed{\text{le maximum est atteint en un point } b \text{ unique}}$

Partie -C-

10. L'équation (E) est linéaire :

$\triangleright$Les solutions de l'équation homogène associée : $y'+2\,x\,y=0$

sont $x\mapsto K\,e^{\int -2\,x\,dx}=K\,e^{-x^2}$ $\triangleright D$ est une solution particulière de (E)

Les solutions de (E) sont donc $\boxed{x\mapsto K\,e^{-x^2}+D(x)\quad K\in\mathbb{R}}$

11. D étant impaire, une solution ci-dessus est impaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall\,x\in\mathbb{R}\quad K\,e^{-x^2}+D(x)=-K\,e^{-(-x)^2}-\underbrace{D(-x)}_{=-D(x)}$$

$$\forall\,x\in\mathbb{R}\quad K\,e^{-x^2}=-K\,e^{-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad K=0$$

$$\boxed{D \text{ est la seule solution impaire de } (E)}$$