Devoir Maison 13

Pour le lundi 2 Mars 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (Niveau simple)
On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par :

$$f(x) = \ln x + x$$

A. Existence des racines de (E_n)

1. Etudier les variations de la fonction f. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, (E_n) admet une racine et une seule x_n et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Donner la valeur de x_1. Trouver à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_2 à 10^{-2} près, et déterminer l'entier naturel p tel que
$$\frac{p}{100} \leqslant x_2 < \frac{p+1}{100}.$$
3. Représenter la fonction f relativement à un repère orthonormal du plan (unité graphique : 2 cm).

B. Etude de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \qquad \ln x < x.$$
2. Prouver que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad \frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$$
3. Quelle est la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$?

C. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$

1. Montrer que $\dfrac{\ln(x_n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En déduire que :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$
2. Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}.$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \qquad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln n}.$$

(b) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

(c) Prouver alors que :

$$1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. En déduire qu'il existe une fonction ε ayant une limite nulle en 0 telle que, pour tout entier supérieur ou égal à 2, on ait :

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 2 (Niveau relevé)

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie -A-

On considère l'équation différentielle $\quad y' + 2\,x\,y = 1.$

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

(on ne demande pas de résoudre cette équation)

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$

(que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.)

2. (a) Prouver que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

(b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Justifier l'utilisation de la formule de Leibniz pour montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ f^{(k+2)}(x) = -\,2\,x\,f^{(k+1)}(x) - 2\,(k+1)\,f^{(k)}(x)$$

4. (a) Montrer que f admet, au voisinage de 0, un développement limité à tout ordre.

Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$$

(b) Utiliser le résultat du **3** pour montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ a_{k+2} = -\frac{2}{k+2}\,a_k$.

En déduire : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ a_{2\,k+1} = \frac{(-4)^k\,k\,!}{(2\,k+1)\,!}$.

(c) Obtenir également l'expression des termes $a_{2\,k}$ à l'aide de $f(0)$ et k $\ (k \in \mathbb{N})$.

Partie -B-

On considère la fonction D de la variable réelle : $\quad D\,:\,x \mapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{(t^2)}\,dt.$

5. Justifier le fait que D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\quad y' + 2\,x\,y = 1.$

6. Étudier la parité et le signe de D.

7. Montrer[1] que, pour tout réel positif x nous avons : $\quad x\,e^{-(x^2)} \leqslant D(x) \leqslant x.$

Que peut-on dire dans le cas où le réel x est négatif ?

1. On utilisera la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$

8. (a) Prouver que[2] : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \int_1^x e^{(t^2)}\,dt = \frac{e^{(x^2)}}{2\,x} + \frac{e^{(x^2)}}{4\,x^3} - \frac{3\,e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt.$

   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \frac{e^{(t^2)}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[\,1\,,\,+\infty\,[$.

   En déduire que : $\forall\, x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,\ 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\ \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$

   et, qu'au voisinage de $+\infty$: $\int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt = o\left(\frac{e^{(x^2)}}{2\,x}\right)$

   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $\int_1^x e^{(t^2)}\,dt \sim \frac{e^{(x^2)}}{2\,x}$.

   En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

9. (a) Prouver que D admet un maximum, atteint en un point b de R_+^*.

   (b) Montrer que ce maximum est égal à $\frac{1}{2\,b}$.

   (c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

Partie -C-

10. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2\,x\,y = 1$.
11. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

2. On peut se contenter de vérifier la formule annoncée. Il est cependant préférable d'établir cette formule par une double intégration par parties (qu'on justifiera).