Devoir Maison 12 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Posons $t = \tan(\theta)$. Les formules trigonométriques utilisées sont élémentaires :

$$\tan(3\,\theta) = \frac{\tan(2\,\theta)+\tan(\theta)}{1-\tan(2\,\theta)\tan(\theta)} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}+t}{1-\frac{2t}{1-t^2}\,t} \qquad \boxed{\tan(3\,\theta) = \frac{3\,\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\,\tan^2\theta}}$$

2. *Conditions de définition :* Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc

f est définie si et seulement si $1-3\,x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Limiter l'ensemble d'étude : f est impaire.

On limite l'étude à $E = \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\bigcup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

puis on complète la représentation par symétrie par rapport à l'origine.

Transformons l'expression : en posant $\theta = \text{Arctan}\,x$,

il vient $f(x) = \text{Arctan}\left(\tan(3\,\theta)\right)$ soit $\tan\left(f(x)\right) = \tan(3\,\theta)$

Nous savons que la fonction "tan" est injective sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme $-\frac{3\,\pi}{2} < 3\theta < \frac{3\,\pi}{2}$, plusieurs cas se présentent :

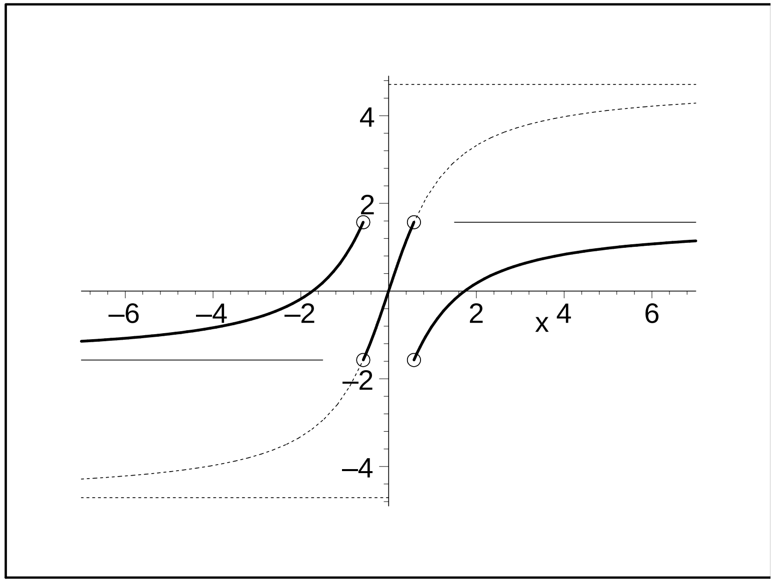
- $-\frac{\pi}{2} < 3\,\theta < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$
  alors, $f(x)$ et $3\,\theta$ sont dans I. Dans ce cas : $f(x) = 3\,\theta$
- $\frac{\pi}{2} < 3\,\theta < \frac{3\,\pi}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < x$. Alors
  $f(x), 3\,\theta-\pi \in I$ et $\tan\left(f(x)\right) = \tan(3\,\theta-\pi)$ donc $f(x) = 3\,\theta-\pi$
- $-\frac{3\pi}{2} < 3\,\theta < -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Alors
  $f(x), 3\,\theta+\pi \in I$ et $\tan\left(f(x)\right) = \tan(3\,\theta+\pi)$ donc $f(x) = 3\,\theta+\pi$
- $3\,\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\theta < \pm\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x < \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Alors $x \notin E$.

Résumons ceci dans un tableau :

$\theta = \text{Arctan}(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$3\,\theta+\pi$	$\|\|$	$3\,\theta$	$\|\|$	$3\,\theta-\pi$	

en pointillés : $y = 3\,\theta = 3\,\text{Arctan}\,x$



Exercice 2

$x \in I = \left]0, \pi\right[$, $\begin{cases} (E_1) : & y'\sin(x) - y\,\cos(x) = \sin^2(x)\,e^x \\ (E_2) : & y''+y = \left(\sin(x)+2\,\cos(x)\right)\,e^x \end{cases}$

1. — Commençons par montrer que, sur I, une solution de (E_1) est deux fois dérivable. Comme $\sin(x)$ ne s'annule pas sur I, une solution y de (E_1) vérifie $y' = \dfrac{y\,\cos(x)+e^x\sin^2 x}{\sin x}$. y étant dérivable, le membre de droite (donc y') est à son tour dérivable. cqfd.
   — Si y est solution de (E_1), nous avons : $y'\sin(x) - y\,\cos(x) = \sin^2(x)\,e^x$.
   En dérivant, il vient : $y''\sin(x)+y\,\sin(x) = e^x\,\left(\sin^2(x)+2\,\sin(x)\cos(x)\right)$.
   On simplifie par $\sin(x) \neq 0$. Il reste : $y''+y = e^x\,\left(\sin(x)+2\,\cos(x)\right)$ ce qui montre bien que y est solution de (E_2). $\boxed{\mathcal{S}_{E_1} \subset \mathcal{S}_{E_2}}$

2. (a) Le changement de fonction $z = \dfrac{y}{e^x}$ est valide puisque $x \mapsto e^x$ est deux fois dérivable et ne s'annule pas.
   (b) En dérivant : $y = z\,e^x$, $y' = \left(z'+z\right)$, $y'' = \left(z''+2z'+z\right)$. On remplace dans (E_2) et on simplifie par $e^x \neq 0$ $\boxed{(E_3) : \quad z'+2z'+2z = \sin(x)+2\,\cos(x)}$
   (c) (E_3) est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants (avec second membre).

— l'équation caractéristique $t^2+2t+2=0$ a pour solutions $t=-1\pm i$.
— Les solutions de l'ESSMA sont donc $z=e^{-x}\big(A\,\sin(x)+B\,\cos(x)\big)\quad A,B\in\mathbb{R}$
— On recherche une solution particulière de (E_3) sous la forme :

$$\left.\begin{array}{lll} z & = \alpha\sin x+\beta\cos x & 2\\ z' & =-\beta\sin x+\alpha\cos x & 2\\ z'' & =-\alpha\sin x-\beta\cos x & 1\end{array}\right\}\Rightarrow \sin x+2\cos x=(\alpha-2\beta)\sin x+(2\alpha+\beta)\cos x$$

Par identification : $\begin{cases}\alpha-2\beta=1\\ 2\alpha+\beta=2\end{cases}$ donne $\alpha=1,\ \beta=0$.

Les solutions de (E_3) sont donc $\boxed{z=e^{-x}\big(A\,\sin(x)+B\,\cos(x)\big)+\sin(x)\quad A,B\in\mathbb{R}}$

Comme $y=z\,e^x$,
les solutions de (E_2) sont $\boxed{y=A\,\sin(x)+B\,\cos(x)+e^x\,\sin(x)\quad A,B\in\mathbb{R}}$

D'après la question **1**, les solutions de (E_1) sont de cette forme. On remplace dans (E_1), ce qui donnera les conditions pour être solution :

$$\begin{array}{lll} y & =A\,\sin(x)+B\,\cos(x)+e^x\,\sin x & -\cos x\\ y' & =A\,\cos(x)-B\,\sin(x)+e^x\big(\sin x+\cos x\big) & \sin x\end{array}$$

(E_1) est équivalente à $-B+e^x\,\sin^2 x=e^x\,\sin^2 x\Leftrightarrow B=0$
les solutions de (E_1) sont $\boxed{y=A\,\sin(x)+e^x\,\sin(x)\quad A\in\mathbb{R}}$

3. (E_1) est une équation linéaire du premier ordre.

Solutions de l'ESSMA : $y=K\,e^{\int\frac{\cos x}{\sin x}dx}=K\,e^{\ln|\sin x|}=K\,\underbrace{\sin x}_{y_0}$ (sur $I,\ \sin x>0$)

On recherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

$$\left.\begin{array}{lll} y & =\varphi\,y_0 & -\cos x\\ y' & =\varphi'\,y_0+\varphi\,y_0' & \sin x\end{array}\right\}\Rightarrow (E_1)\text{ est équivalente à } e^x\,\sin^2 x=\varphi'\sin^2 x,$$

d'où $\varphi'=e^x$ (sin ne s'annule pas sur I).

La solution particulière est $e^x\sin x$. Les solutions de (E_1) sont $\boxed{(K+e^x)\,\sin x\quad K\in\mathbb{R}}$

On trouve le même résultat . . . OUF ! ! !