Devoir Maison 12 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. La fonction z définie par $\forall\, x \in I, \quad z(x) = x\, y(x)$ est deux fois dérivable comme produit de deux fonctions deux fois dérivables. Dérivons : $z(x) = x\, y(x)$
$z'(x) = x\, y'(x) + y(x)$
$z''(x) = x\, y''(x) + 2\, y'(x)$
L'équation $\mathcal{E} : \underbrace{x\, y''(x) + 2\, y'(x)}_{=z''(x)} - \underbrace{x\, y(x)}_{=z(x)} = 4\, x\, e^x$ devient $\boxed{\mathcal{F} :\ z'' - z = 4\, x\, e^x}$

2. $\mathcal{F}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Son équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solutions ± 1 .
— Les solutions de l'ESSMA sont $y : x \mapsto A\, e^x + B\, e^{-x},\ A, B \in \mathbb{R}$
— Le coefficient de x dans l'exponentielle est racine simple de l'équation caractéristique.
On peut chercher une solution particulière de $\mathcal{F}$ sous la forme $z(x) = (a\, x^2 + b\, x)\, e^x$:

$$\left\{\begin{array}{ll|c} z(x) & = (a\, x^2 + b\, x)\, e^x & -1 \\ z'(x) & = (a\, x^2 + (b + 2\, a)\, x + b)\, e^x & 0 \\ z''(x) & = \big(a\, x^2 + (b + 4\, a)x + 2\, b + 2\, a\big)\ e^x & 1 \\ \hline 4\, x\, e^x & = (4\, a\, x + 2\, a + 2\, b)\, e^x & \end{array}\right.$$

Par identification, on obtient la solution particulière de $\mathcal{F}$ $z : x \mapsto (x^2 - x)\, e^x$
Nous avons les éléments pour donner les solutions de l'équation linéaire $\mathcal{F}$:

$$\boxed{z : x \mapsto x \mapsto A\, e^x + B\, e^{-x} + (x^2 - x)\, e^x,\ A, B \in \mathbb{R}}$$

Sur $I \subset \mathbb{R}^*$, les solutions de $\mathcal{E}$ sont $x \mapsto y(x) = \frac{z(x)}{x}$

$$\boxed{y : x \mapsto x \mapsto \frac{A\, e^x + B\, e^{-x}}{x} + (x - 1)\, e^x,\ A, B \in \mathbb{R}}$$

3. **Question annexe**
(a) Le développement limité ne présente aucune difficulté :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{et} \qquad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où $\quad \varphi(x) = \frac{1}{x}\big((A + B) + (A - B)\, x + \frac{A+B}{2}\, x^2 + o(x^2)\big)$
soit $\boxed{\varphi(x) = \frac{A+B}{x} + A - B + \frac{A+B}{2}\, x + o(x)}$

Si $A + B \neq 0$, φ ne peut être prolongée par continuité en 0 (limite infinie).
Si $A + B = 0$, alors $\varphi(x) = 2\, A + o(x)$.
Alors, l'existence de ce $\mathrm{DL}_1(0)$ prouve que
— φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{\varphi(0)=2\,\mathrm{A}}$
— Ainsi prolongée, φ est dérivable en 0 avec $\boxed{\varphi'(0) = 0}$

(b) La fonction φ peut s'écrire

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\big(A\,(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + B\,(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\big) = (A + B)\,\frac{\operatorname{ch}(x)}{x} + (A - B)\,\frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$$

Les limites connues $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0_{+\varepsilon}} \frac{\operatorname{ch} x}{x} = \varepsilon\,\infty$ confirment que φ n'admet une limite finie que si $A + B = 0$, et qu'alors cette limite vaut $2A$.

4. **Raccordement des solutions**
(a) Une solution y de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$y(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{A_1\, e^x + B_1\, e^{-x}}{x} + (x - 1)\, e^x & = \varphi_1(x) + g(x) & \text{si } x > 0 \\ a & & \text{si } x = 0 \\ \frac{A_2\, e^x + B_2\, e^{-x}}{x} + (x - 1)\, e^x & = \varphi_2(x) + g(x) & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

Sur les intervalles de $\mathbb{R}^*$ c'est la somme d'une fonction φ précédente et de la fonction g continue dérivable (avec $g(0) = -1$ et $g'(0) = 0$).
— y ainsi définie est donc continue <u>ssi</u> $\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 = A_2 + B_2 \\ 2\, A_1 - 1 = a = 2\, A_2 - 1 \end{cases}$

Les conditions sont $\boxed{\begin{cases} A_1 = A_2 = -B_1 = -B_2 \\ a = 2\, A_1 - 1 \end{cases}}$

— Sous ces conditions, φ est dérivable et $\varphi'(0)=0$.
On en déduit que y est dérivable et $y'(0) = g'(0) = 0$ y vérifie l'équation $\mathcal{E}$.
Les solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions définies par

(en notant $A_1 = \frac{A}{2}$) $\boxed{y(x) = \begin{cases} A\,\frac{\operatorname{sh} x}{x} + (x - 1)\, e^x & \text{si } x \neq 0 \\ A - 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

(b) L'unique solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$ est obtenue pour $\boxed{\mathrm{A}=1}$

Version sans DL

Question liminaire :[1] on admet que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Quelle est la limite en 0 de $\frac{e^x-e^{-x}-2\,x}{x^2}$?

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 et y une fonction réelle de la variable x réelle définie sur I. On donne l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \quad x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4\,x\,e^x$$

1. On pose $\forall\, x \in I, \quad z(x) = x \cdot y(x)$.
   Montrer que y est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle $\mathcal{F}$ que l'on précisera.
2. Déterminer une solution particulière de $\mathcal{F}$.
3. Résoudre $\mathcal{F}$ sur I ; en déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur I.
4. Trouver par raccordement toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'unique solution y de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$.

Correction

Question liminaire : nous avons $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+x}{(-x)^2} = \frac{1}{2}$.
(si $x \to 0$ alors $-x \to 0$)

Par soustraction, il vient $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2\,x}{x^2} = 0}$

1. La fonction z définie par $\forall\, x \in I, \quad z(x) = x\,y(x)$ est deux fois dérivable comme produit de deux fonctions deux fois dérivables. Dérivons : $z(x) = x\,y(x)$
   $z'(x) = x\,y'(x) + y(x)$
   $z''(x) = x\,y''(x) + 2\,y'(x)$
   L'équation $\mathcal{E}$: $\underbrace{x\,y''(x) + 2\,y'(x)}_{=z''(x)} - \underbrace{x\,y(x)}_{=z(x)} = 4\,x\,e^x$ devient $\boxed{\mathcal{F} : \ z'' - z = 4\,x\,e^x}$

2. $\mathcal{F}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solutions ± 1 . Le coefficient de x dans l'exponentielle est racine simple de cette équation. On peut chercher une solution particulière de $\mathcal{F}$ sous la forme $z(x) = (a\,x^2 + b\,x)\,e^x$:

$$\left\{\begin{array}{rl|c} z(x) & = (a\,x^2 + b\,x)\,e^x & -1 \\ z'(x) & = (a\,x^2 + (b+2\,a)\,x + b)\,e^x & 0 \\ z''(x) & = \big(a\,x^2 + (b+4\,a)x + 2\,b + 2\,a\big)\ e^x & 1 \\ \hline 4\,x\,e^x & = (4\,a\,x + 2\,a + 2\,b))\,e^x & \end{array}\right.$$

Par identification, on obtient la solution particulière de $\mathcal{F}$ $\boxed{z : x \mapsto (x^2 - x)\,e^x}$

3. $\mathcal{F}$ est une équation linéaire dont nous connaissons une solution particulière.
   Comme les solutions de l'ESSMA sont $y : x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-x}, \ A, B \in \mathbb{R}$,
   les solutions de $\mathcal{F}$ sont $\boxed{z : x \mapsto x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-x} + (x^2 - x)\,e^x, \ A, B \in \mathbb{R}}$

   Sur $I \subset \mathbb{R}^*$, les solutions de $\mathcal{E}$ sont $x \mapsto y(x) = \frac{z(x)}{x}$

   $\boxed{y : x \mapsto x \mapsto \frac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x, \ A, B \in \mathbb{R}}$

4. Par raccordement, une solution f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A_1\,e^x + B_1\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x & \text{si } \ x > 0 \\ a & \text{si } \ x = 0 \\ \frac{A_2\,e^x + B_2\,e^{-x}}{x} + (x-1)\,e^x & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

— f est continue en 0 <u>ssi</u> $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Or $\frac{A\,e^x + B\,e^{-x}}{x} + (x-1)e^x = A\,\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} + B\,\underbrace{\frac{e^{-x} - 1}{x}}_{\to -1} + \frac{A+B}{x} + \underbrace{(x-1)e^x}_{\to -1}$

a une limite finie en 0 si et seulement si $A + B = 0$. Cette limite vaut $A - B - 1$.

f est donc continue en 0 <u>ssi</u> $\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = 0 \\ a = A_1 - B_1 - 1 = A_2 - B_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 = -B \\ a = 2\,A_1 \end{cases}$

f est alors définie par $\boxed{f(x) = \begin{cases} A\,\frac{e^x - e^{-x}}{x} + (x-1)e^x & \text{si } \ x \neq 0 \\ 2\,A - 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}}$

— Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0 (par la limite du taux d'accroissement) :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{A\,\frac{e^x - e^{-x}}{x} + (x-1)e^x - 2A + 1}{x} \\ &= A\,\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} + (x-1)\,\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \\ &= A\,\underbrace{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}}_{\to 0} + (x-1)\,\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}}_{=1} \end{aligned}$$

1. Ce résultat sera utilisé dans la question 4.

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour $x = 0$: $0 \cdot f''(0) + 2 \cdot f'(0) - 0 \cdot f(0) = 4 \cdot 0 \cdot e^0$: l'équation est vérifiée.

$\boxed{\text{Les solutions de } \mathcal{E} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } f \text{ ci-dessus.}}$

5. La condition initiale $y(0) = 0$ est équivalente à $2A - 1 = 0 \iff \boxed{A = \frac{1}{2}}$

Alors : $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x} + (x-1)\, e^x$